Institut Blaise Pascal
Discipline-Travail-Succès
Département de mathématiques

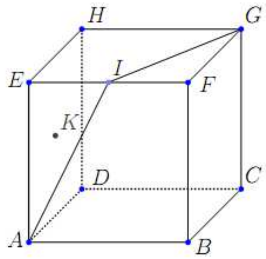
TRAVAUX DIRIGES : Produit vectoriel.

Année Scolaire : 2020-2021
Classe : Tle C

Proposés par : M.Tchepanou Achille Boris.

Exercice 1.

Soit le cube ABCDEFGH représenté ci-contre. L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
On désigne par I le milieu du segment [EF] et par K le centre du carré ADHE.



1. a) Vérifier que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$.
b) En déduire l'aire du triangle IGA.
2. a) Calculer le volume du tétraèdre ABIG.
b) Quelle est la distance du point B au plan (AIG) ?
3. Donner une équation cartésienne du plan (AIG).

Exercice 2.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3. On choisit le repère orthonormal $(D; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.
1. a) Donner les coordonnées des points A, C et E.
b) Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(C, 2); (E, 1)\}$.
c) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$.
2. Soit (a ;b) un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AE}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN} = b\overrightarrow{DL}$.
a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple (a ;b) vérifie le système $\begin{cases} -a + 2b = 1 \\ 3a - b = 0 \end{cases}$.
b) En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).
c) Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 , puis calculer la distance M_0N_0.

Exercice 3.

L'espace E est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère la droite Δ passant par le point $A(-3\,;1\,;-3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ et la droiet (D) passant par le point B(3 ;2 ;3) et de vecteur directeur $\vec{v} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$.
1. a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis conclure.
b) Justifier que les droites Δ et (D) sont orthogonaux et non coplanaires.
c) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant Δ et parallèle à (D).
2. Soit (S) la sphère de centre C$(-1\,;0\,;-1)$ et de rayon 6, et (P) le plan d'équation cartésienne $2x + y + 2z + 13 = 0$.
a) Montrer que (S) et (P) se coupe suivant un cercle de centre A. Déterminer le rayon de ce cercle.
b) Montrer que la droite (D) est tangente à la sphère (S) au point B.
3. a) Calculer AB. En déduire que le point C appartient au segment [AB].
b) Déterminer alors une droite perpendiculaire aux droites (D) et Δ.

Exercice 4.

Partie A :
On considère deux point A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].
1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace,
$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$.
2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$

Partie B :
Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $A(3\,;0\,;0)$, $B(0\,;6\,;0)$, $C(0\,;0\,;4)$ et $D(-5\,;0\,;1)$.
1. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(4; 2; 3)$ est normal au plan (ABC).
2. Déterminer une équation du plan (ABC).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC)et passant par D.
4. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
5. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
6. Démontrer que le point H appartient à l'ensemble (E) défini dans la partie A.

Exercice 5. *Choisir la proposition juste.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
1. On considère les points $A(1\,;-2\,;4)$, $B(-2\,;-6\,;5)$, $C(-1\,;0\,;6)$ et $D(-4\,;0\,;-3)$.
a. La droite (AD) est parallèle au plan (ABC).
b. La droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
c. La droite (AD) n'est ni parallèle ni perpendiculaire au plan (ABC).
2. On considère le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$ et le point S$(1\,;-2\,;0)$. Un représentation paramétrique de la droite perpendiculaire à P et passant par S est :
a. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$
3. On considère le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$ et le point S$(1\,;-2\,;0)$.
L'intersection de la sphère de centre S et de rayon 3 avec le plan P est :
a. Un cercle de rayon $\frac{3\sqrt{10}}{11}$
b. l'ensemble vide.
c. Un cercle de rayon $3\sqrt{\frac{10}{11}}$.
4. Les droites de représentations paramétriques
$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ b. $\begin{cases} x = 1 + 2f \\ y = 1 - 2f \\ z = -3 + 4f \end{cases}$ sont :
a. non coplanaires **b.** parallèles. **c.** sécantes.

Exercice 6.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. P et P' sont les plans d'équations respectives $x + 2y + z - 1 = 0$ et $x - z + 1 = 0$.
1. Montrer que P et P' sont deux plans sécants. Sont-ils perpendiculaires ?
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de P et P'.

3. P'' est le plan d'équation $x - y + z = 0$. Montrer que P'' est perpendiculaire aux deux plans P et P'.
4. Donner les coordonnées du point d'intersection A des trois plans P, P' et P''.
5. a) Vérifier que le point $B(3\,;-3\,;4)$ est un point de la droite (D).
b) Calculer de deux manières différentes la distance du point B au plan P''.
6. Donner une équation cartésienne de la sphère de centre B tangente au plan P''.
7. Pour quelles valeurs du réel k cette sphère coupe-t-elle mes plans d'équation $x + y + z + k = 0$ selon un cercle de rayon non nul ? Préciser alors la valeur du rayon en fonction de k.

Exercice 7.

L'espace ξ est muni du repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Soit les points $A(1\,;0\,;-1)$, $B(3\,;-1\,;2)$, $C(2\,;-2\,;-1)$ et $E(4\,;-1\,;-2)$.
1. Expliquer pourquoi les points A, B et C définissent un unique plan que l'on notera P.
2. a) Prouver que la droite (CE) est orthogonale à la droite (AB) et à la droite (AC).
b) En déduire une équation du plan P.
c) Calculer la distance d du point E au plan P.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AE).
4. On considère la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
a) Donner un point J et un vecteur directeur $\vec{w}$ de la droite Δ.
b) Expliquer pourquoi la droite Δ est contenue dans le plan P.
5. a) Déterminer le point M de Δ tel que les vecteurs $\overrightarrow{EM}$ et $\vec{v}(0;1;1)$ soient orthogonaux.
b) En déduire la distance d' du point E à la droite Δ.

Exercice 8.

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ d'unité 1 km. Le plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ représente le sol.
Les deux « routes aériennes » à contrôler sont représentées par deux droites (D_1) et (D_2), dont on connait des représentations paramétriques :

$$(D_1) : \begin{cases} x = 3 + \alpha \\ y = 9 + 3\alpha, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}$$

$$(D_2) : \begin{cases} x = 0{,}5 + 2\beta \\ y = 4 + \beta \\ z = 4 - \beta \end{cases}, \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}.$$

1. Prouver que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.
2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées $(3\,;4\,;0{,}1)$, un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R). Soit (P_1) le plan contenant S et (D_1) et soit (P_2) le plan contenant S et (D_2).
a) Montrer que (D_2) est sécante à (P_1).
b) Montrer que (D_1) est sécant à (P_2).
c) Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites (D_1) et (D_2). Cette affirmation est-elle vraie ?Justifier la réponse.

Exercice 9.

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(-2;1;3)$, $B(0\,;2\,;-2)$, $C(2\,;1\,;1)$, $D(1\,;0\,;2)$ et le plan (P) d'équation $2x - y + 2z + 1 = 0$.
1. a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis en déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
b) Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
c) Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCD.
2. a) Déterminer les coordonnées du point G tel que : G=bar$\{(A,1);(B,-2);(C,3)\}$.
b) Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que :

$$\left(\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{CM}\right)\cdot\overrightarrow{BM} = 0.$$

c) Déterminer l'intersection du plan (P) et de l'ensemble (S).

Exercice 10.

L'espace ξ est muni du repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Soit les points $A(1\,;-1\,;0)$, $B(3\,;0\,;1)$, $C(1\,;2\,;0)$ et $E(1\,;0\,;0)$.
1. Démontrer que ABCD est un tétraèdre.
2. Calculer la distance minimale d'un point de (AC) et d'un point de (BD).
3. Calculer l'aire totale du tétraèdre ABCD.
4. Calculer la distance de A à la droite (DC).
5. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
6. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

*Exercice 11.

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace oriente $\mathscr{E}$ et M un point quelconque.
1. a) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}$ est indépendant du point M.
b) Interpréter géométrique $\|\vec{u}\|$.
2. Etudier le cas où A, B et C sont alignés.

*Exercice 12.

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace oriente $\mathscr{E}$ tels que AB=6 et I le milieu de [BC].
1. Déterminer l'ensemble (Γ_1) des points M tels que : $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}$.
2. Déterminer l'ensemble (Γ_2) des points M tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\| = 24$.
3. Déterminer l'ensemble (Γ_3) des points M tels que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CM} = 0$

4. Déterminer l'ensemble (Γ_4) des points M tels que : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = 0$

Exercice 13.

On considère dans le plan orienté un triangle ABC.
Soit G le barycentre du système $\{(A, 3), (B, 1), (C, 1)\}$, Q le barycentre du système $\{(A, 3), (C, 1)\}$ et R le barycentre du système $\{(A, 3), (B, 1)\}$.
1. Démontrer que les droites (BQ) et (CR) passent par G.
2. Soit P le milieu de [BC], démontrer que les points A, P et G sont alignés.
3. On suppose B et C fixes et que le point A décrit l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.
Déterminer alors l'ensemble (E') décrit par le point G.

Exercice 14.

A et B sont deux points distincts de l'espace E. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de E tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ $(k \in \mathbb{R})$

Exercice 15.

ABCD est un rectangle du plan , de diagonales, [AC] et [BD] de longueur a.
1. Soit $m \in \mathbb{R}^*$. On pose $G_m = bar\{(A, m), (B, -1), (C, 1)\}$.
  a) Préciser la position de G_1.
  b) Déterminer l'ensemble E_1 des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.
2. Quel est l'ensemble E_2 des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = a$.
3. Quel est l'ensemble E_3 des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = \frac{a^2}{4}$.
4. Faire une figure où l'on représentera le rectangle ABCD et les ensembles E_1, E_2 et E_3.

Exercice 16.

On donne A, B et C des points de l'espace.
1. Déterminer l'ensemble E' des points M de l'espace E tels que :
$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = k$ $(k \in \mathbb{R})$.
2. Déterminer l'ensemble E' précédent analytiquement si l'on donne A(1 ; 0 ; 0), B(0 ;1 ;0) et C(−1 ;2 ;1).

Exercice 17.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On donne A(6 ; 0 ; 0), B(0 ;6 ;0).
1. Faire la figure.
2. Déterminer G=bar{(O, 1) ;(A, 2) ;(B, 3)} et placer le sur la figure.
3. Soit C(0 ;0 ;4). Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace défini par : $\left(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) \cdot \overrightarrow{MC} = 0$. Donner une équation cartésienne de (S).
3. Déterminer l'intersection de (S) avec le plan (P) : x=0.
4. Soit E_0 l'ensemble des points M de l'espace tels que $MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24$.
Montrer que G appartient à E_0, puis déterminer E_0.

Exercice 18.

Soit (D) l'ensemble des points M du plan tels que :
$\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right) \cdot \overrightarrow{CG} = 12.$ (1)
1. Montrer que G est le barycentre du système des points pondérés {(A, -1), (B, 2), (C, 2)}.
2. Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4.$ (2)
3. Vérifier que le point A appartient à l'ensemble (D).
4. Montrer que la relation (2) est équivalente à la relation $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$.
5. En déduire l'ensemble (D).

Exercice 19. 

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(3 ;0 ;1), B(0 ;-1 ;-2) et C(1 ;-1 ;0).
1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit D le point de coordonnées (1 ;1 ;-2). Calculer le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{DA}$ et du vecteur $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$.
3. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par D et dont un vecteur directeur est $\vec{n}$.
  b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de cette droite avec le plan (ABC).
  c) Calculer la distance DH du point D au plan (ABC).
4. Calculer les coordonnées du point D', symétrique du point D par rapport au plan (ABC).

Exercice 20.

Soit dans l'espace orienté, un tétraèdre régulier ABCD. On pose AB=a
I, J, K, L, M et N désigne les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DA], [AC] et [BD] G désigne l'isobarycentre du tétraèdre ABCD.
1. Démontrer que :
  a) IJKL est un carré de centre G.
  b) La droite (MN) est la perpendiculaire commune aux droites (AC) et (BD).
  c) G est le milieu de [MN].
2. On défini le point P par : $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GL} \wedge \overrightarrow{GK}$.
  a) Montrer que P appartient à la droite (MN)
  b) Calculer GP en fonction de a.
  c) Montrer qu'il existe une seule valeur de a pour laquelle le point P appartient à une arête du tétraèdre.

Exercice 21.

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace, tels que A, B et C ne soient pas alignés. On désigne par Γ l'ensemble des points M de l'espace tels que l'on ait
$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$.
1. Démontrer qu'une condition nécessaire pour que l'ensemble Γ ne soit pas vide est D∈(ABC).
2. Démontrer que quels que soient les points M et P de l'espace,
  on a : $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MP} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{PB}$.
3. On suppose que A, B, C et D coplanaires.
  a) Démontrer que si (AB) et (CD) sont sécants en un point K, l'ensemble Γ est une droite passant par K, dont on donnera un vecteur directeur.
  b) On suppose $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}$, avec $\alpha \neq 1$.
Montrer que le barycentre J de (A, 1) et (C, $-\alpha$) appartient à Γ. Déterminer Γ et illustrer par une figure .
  c) Etudier le cas où $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Exercice 22.

Soit un tétraèdre ABCD, où BCD est un triangle équilatéral et où A se projeté en H, contre de gravité de BCD. M étant un point du segment [AH], on se propose de minimaliser la somme des aires des triangles MBC, MCD, MDB, MAB, MAC et MAD lorsque M décrit [AH].

1. Faire la figure.

2. Montrer que les aires des triangles MAB, MAC et MAD sont égales, puis que les aires des triangles MBC, MCD et MDB sont égales.

3. On pose pour la suite de l'exercice AH=a (a nombre réel strictement positif) HM=t (t réel positif) et BD=$\sqrt{3}$.

a) On pose $\vec{k} = \frac{1}{AH}\overrightarrow{AH}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{HD}$, $\vec{i}$ est le vecteur unitaire tel que le repère $(H;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ soit un repère orthonormal direct.

Montrer que les coordonnées de C sont : $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$.

b) Calculer les coordonnées des produits vectoriels : $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}$.

c) En déduire les aires des triangles MAB et MNC, puis la somme S(t) des aires des triangles MBC, MCD, MDB, MAB, MAC et MAD.

d) Montrer que la somme S(t) est proportionnelle à : $a - t + \sqrt{3t^2 + \frac{3}{4}}$.

4. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$f(t) = a - t + \sqrt{3t^2 + \frac{3}{4}}$.

a) Calculer la dérivée f' de la fonction f. Montrer que f' s'annule en t_0 , valeur indépendante de a.

b) f_a étant la restriction de f sur [0 ; a], dresser le tableau de variation de f_a pour $a < t_0$, puis pour $a \geq t_0$.

5. Déduire des questions précédentes qu'il existe un et un seul point I du segment [AH] tel que la somme S(t) soit minimale.

6. a) Quelle est la position du point I quand $a < t_0$?

b) Quand $a \geq t_0$, montrer que I est le centre de gravité du tétraèdre régulier construit sur le triangle BCD dont le quatrième sommet se trouve sur la demi-droite d'origine H contenant A.

Exercice 23.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (P) le plan d'équation:

$3x + y - z - 1 = 0$ et (D) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$ où t désigne un nombre réel.

1. a) Le point C(1 ;3 ;2) appartient-il au plan (P) ?Justifier.

b) Démontrer que la droite (D) est incluse dans le plan (P).

2. Soit (Q) le plan passant par le point C et orthogonal à la droite (D).

a) Déterminer une équation cartésienne de du plan (Q).

b) Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan (Q) .

c) Montrer que $CI = \sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite (D) de coordonnées

$(-t + 1; 2t;\ -t + 2)$.

a) Vérifier que pour tout nombre réel t,

$CM_t^{\ 2} = 6t^2 - 12t + 9$.

b) Montrer que CI est la valeur minimal de CM_t lorsque t décrit des nombres réels.