TS1 : Dénombrements et Probabilités

Exercice 1

On considère l'équation du second degré $x^2 + bx + c = 0$. Les coefficients b et c sont déterminés par le jet d'un même dé deux fois de suite.

1. Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire, puis calculer son cardinal.

2. Déterminer les probabilités des événements suivants:

A: « l'équation $x^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles distinctes ».

B: « l'équation $x^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles confondues ».

C: « l'équation $x^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solutions réelles ».

Exercice 2

On considère le système suivant d'inconnues réelles x et y: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$ où a, b et c désignent trois paramètres appartenant à l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Pour déterminer a, b et c, on lance trois fois de suite un dé cubique supposé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le premier numéro sorti donne a, le deuxième b et le troisième c. Déterminer la probabilité des événements suivants:

A: « le système admet une infinité de solutions».

B: « le système n'a aucune solution ».

C: « le système admet une solution unique ».

D: « le système admet comme unique solution le couple $(3; 0)$ ».

Exercice 3

On considère une classe de 30 élèves

1. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas deux élèves de la classe qui aient le même jour anniversaire?

Pour simplifier les calculs, on suppose que toutes les années ont 365 jours et que la naissance d'une personne est équiprobable quel que soit le jour de l'année.

2. Quelle est alors la probabilité pour qu'au moins deux élèves de la classe aient le même jour anniversaire?

Exercice 4

Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules noires. On effectue des tirages dans cette urne, chacune des 20 boules ayant la même probabilité d'être tirée.

1. On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir:

a. 3 boules blanches et 2 boules noires?

b. des boules de couleurs différentes ?

2. On tire successivement 5 boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir:

a. 3 boules blanches et deux noires dans cet ordre?

b. 3 boules blanches et deux noires dans un ordre quelconque?

Exercice 5

Un sac contient quatre boules vertes numérotées 4; 5; 6; 7, trois boules rouges numérotées 1; 2; 3, deux boules blanches numérotées 8; 9. On prend successivement trois boules que l'on place cote à cote.

1. Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire puis calculer son cardinal.

2. Calculer la probabilité des événements suivants:

a. A: « obtenir trois boules de même couleur ».

b. B: « obtenir trois boules de couleurs différentes ».

c. C: « obtenir une boule blanche et deux rouges ».

d. D: « obtenir une boule portant un numéro pair et deux rouges ».

Exercice 6

EXERCICE 2

1) On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On note pi la probabilité d'apparition de la face numérotée i. Les pi vérifient : $p1 = p2$; $p3 = p4 = 2p1$; $p5 = p6 = 3p1$;
a) Montrer que $p1 = \frac{1}{12}$.

b) Montrer que la probabilité de l'événement A : « obtenir 3 ou 6 » est égale à $\frac{5}{12}$.

2) Un jeu d'adresse consiste à lancer le dé décrit ci-dessus puis à lancer une fléchette sur une cible fixe.

Si le joueur obtient 3 ou 6, il se place à 5m de la cible et lance la fléchette sur a cible ; à 5m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $\frac{3}{5}$.

Si l'évènement A n'est pas réalisé, il se place à 7m de la cible et lance la fléchette ; à 7m, la cible est atteinte avec une probabilité de égale à $\frac{2}{5}$.

On note C l'événement « la cible est atteinte ».

a) Déterminer p (C/A) et p (C/$\overline{A}$). En déduire que p (C) = $\frac{29}{60}$.

b) Déterminer p (A/C).

3) Le joueur dispose de 10 fléchettes qu'il doit lancer une à une, de façon indépendante, dans les mêmes conditions que précédemment définies.

Calculer la probabilité pour qu'il atteigne la cible exactement 4 fois.

Exercice 7

Karamba possède dans le tiroir de son armoire 5 paires de chaussettes noires, 3 paires de chaussettes vertes et 2 paires de chaussettes rouges. Ces chaussettes, indiscernables au toucher, se trouvent mélangées dans le plus grand désordre. Au moment de s'habiller survient une panne d'électricité. Karamba qui est pressé et n'a ni lampe de poche, ni boite d'allumettes, prend au hasard deux chaussettes dans le tiroir. Calculer, à 0,01 près par défaut:

1. la probabilité pour que Karamba ait tiré deux chaussettes noires.

2. la probabilité pour que Karamba ait tiré deux chaussettes de la même couleur.

3. En supposant que le nombre de chaussettes vertes et rouges restent inchangés, déterminer le nombre n de chaussettes noires devant se trouver dans le tiroir pour que la probabilité que Karamba ait tiré deux chaussettes noires soit égal à $\frac{2}{7}$?

Exercice 8

Un sac contient n billes rouges et $2n$ billes noires ($n \geq 1$), indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'être tirée.

1. On tire simultanément 3 billes du sac.

a. Quelle est la probabilité p_n pour que, parmi ces trois billes, il y'ait une seule rouge?

Calculer $\lim_{n \to +\infty} p_n = p$.

b. *Calculer la probabilité q_n pour que, parmi ces trois billes, il y'ait au moins une rouge?*

Calculer $\lim_{n \to +\infty} q_n = q$.

2. *On effectue maintenant 3 tirages successifs d'une seule bille en remettant dans le sac la bille tirée avant d'effectuer le tirage suivant.*

a. *Montrer que la probabilité d'obtenir une seule bille rouge est égal à p.*

b. *Montrer de même que la probabilité de tirer au moins une bille rouge est égale à q.*

Exercice 9

Un sac contient trois boules numérotées: deux portent le numéro 1 et une porte le numéro 2. On tire au hasard une boule du sac, on note son numéro a et on la remet dans le sac. On répète une deuxième fois cette expérience et l'on désigne par b le numéro de la boule tirée. Soit X la variable aléatoire qui à l'événement noté (a, b)fait correspondre $2a + b^2$.

1. a. *déterminer l'univers image de Ω par X.*

b. *Déterminer la loi de probabilité de X.*

2. *Calculer $E(X)$ et $V(X)$ et en déduire $\sigma(X)$.*

Exercice 10

Une urne contient 10 boules indiscernables, dont 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard successivement et sans remise 3 boules de cette urne. Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles. On considère les événements suivants:

A: *« les trois boules sont rouges »*

B: *« les trois boules sont de la même couleur »*

C: *« les trois boules sont chacune d'une couleur différente »*

1. *Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.*

2. *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.*

Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart type.

Exercice 11

Un sac contient 6 boules numérotées de 0 à 5. On en extrait simultanément 2 boules qui portent respectivement les numéros a et b. On définit la variable aléatoire X qui à chaque résultat de ce tirage, on associe:

- le nombre $\frac{a+b}{2}$ si a et b sont pairs;
- le nombre 0 si a et b sont impairs;
- le nombre $|a-b|$ si a et b sont de parité différentes.

1. a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ et en déduire $\sigma(X)$.

Exercice 12

On lance simultanément au hasard deux dés non pipés.

A. On définit une variable aléatoire réelle X en associant à chaque lancer le total des points marqués sur les faces supérieures

1. a. Quelles sont les valeurs prises par X?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Définir puis représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

B. Voici la règle d'un jeu:

- On gagne 100 Frs si le total des points marqués sur les faces supérieures est supérieur ou égal à 10.
- On perd 100 Frs si ce total est inférieur ou égal à 5.
- On est ni gagnant ni perdant si ce total est 6,7,8 ou 9.

On note Y la variable aléatoire associant à chaque lancer le « gain » (positif, négatif ou nul) correspondant.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y.

2. Calculer $E(Y)$. Le jeu est il avantageux?

3. Calculer $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Exercice 7

On dispose d'un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. On lance ce dé quatre fois de suite. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de sorties du nombre 6.

a. Etudier la loi de X. (Donner les résultats sous forme de fraction irréductibles).

b. Etudier la probabilité d'obtenir au moins une fois le numéro 6.

2. On lance ce dé n fois de suite. Soit p_n la probabilite d'obtenir au moins une fois le numéro 6.

a. Montrer que $p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

b. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geq \frac{1}{2}$? **c.** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 14

Une urne contient quatre jetons qui portent le nombre 1, deux qui portent le nombre e et six qui portent le nombre $\frac{1}{e}$. On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne et on note par x et y les nombres lus, respectivement sur le premier et le deuxième jeton tirés.

A cette expérience, on associe le point M d'affixe $z = lnx + ilny$.

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, déterminer la probabilité de chacun des événements suivants:

A: « M appartient à l'axe des abscisses »;

B: « M appartient à l'axe des ordonnées »;

C: « M appartient aux deux axes »;

D: « M n'appartient à aucun des axes »;

E: « l'angle $(\overrightarrow{OM}, \vec{\imath})$ est égal à $-\frac{\pi}{4}$ »;

F: « le point M appartient au cercle trigonométrique ».

2. Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe la distance .

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 15

Calculer pour tout entier n>0 : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx$

Soit Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, soit α un nombre réel, et soit p l'application de Ω dans IR définie par : Pour tout $n \in \Omega, p(n) = n^2 \alpha I_n$.

Déterminer α pour qu'il existe une probabilité p sur (Ω, p(Ω)) telle que pour tout $n \in \Omega$, on ait p({n}) = p(n).

Exercice 16

On lance simultanément trois dés A, B et C. On s'intéresse aux numéros des faces supérieures des dés. Les numéros successivement obtenus sont les coefficients a, b et c de

$f(x) = ax^2 + bx + c$.

Calculer la probabilité des événements suivants

A « f(x) admet une racine double »

B « f(x) admet deux racines distinctes »

C « f(x) n'admet pas de racine »

D « La somme des racines est égale à 2 »

D « La somme des inverses des racines est égale à leur produit »

Exercice 17

Un questionnaire comprend n questions $(n \geq 6)$: 4 d'algèbre, 2 de géométrie et le reste d'analyse. Un élève tire au hasard et simultanément 3 questions.

On note les événements suivants.

A= tirer exactement 2 questions d'algèbre.

B= tirer exactement 1 question de géométrie.

C= tirer exactement 2 questions d'algèbres et une de géométrie.

1) Calculer en fonction de n les probabilités de A, B et C.

En déduire celle de AUB.

2) Déterminer n pour que P(AUB) = 2 P(A).

Exercice 18

Un panier contient 18 boules : 5 blanches, 6 rouges, 7 noires.

Ces boules sont numérotées de façon à les rendre reconnaissables même avec la même couleur.

On aura ainsi les boules $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_5, N_1, N_2, \ldots, N_7, R_1, \ldots, R_7$.

n étant un entier supérieur ou égal à 4, on répartit les 18 boules dans n urnes numérotées de 1 à n , certaines urnes pouvant rester vides.

1) Quel est le nombre de répartitions possibles ?

2) Quel est le nombre de répartitions vérifiant la condition suivante (notée C_1) :

« L'urne 1 contient exactement trois boules noires »

3) Quel est le nombre de répartitions remplissant la condition C_1 et les deux autres conditions suivantes :

C_2: « l'urne 2 contient exactement trois boules blanches »

C_3: « l'urne 3 contient exactement deux boules rouges »

4) Quel est le nombre de répartitions possibles telles que toutes les boules soient dans deux urnes exactement ?

5) Soit $p \in \{5,6,7\}$.

Montrer que : $\sum_{k=1}^{p} C_p^k (n-1)^{18-k} = (n-1)^{18-p}(n^p - (n-1)^p)$

En déduire le nombre de répartitions telles que l'urne 1 contienne des boules d'une seule couleur ?

Exercice 19

Une agence de voyages propose un circuit touristique comprenant quatre des douze capitales de la Communauté économique européenne (CEE).

Pour définir un circuit, on suppose que chaque capitale n'est visitée qu'une fois et on tient compte de l'ordre de visite de ces capitales ; par exemple, le circuit : " Paris, Madrid, Rome, Athènes " diffère du circuit : " Athènes, Rome, Paris, Madrid ".

1. Combien y a-t-il de circuits différents ?

Dans la suite, on suppose que chaque capitale a la même probabilité d'être choisie.

2. Calculer la probabilité de l'événement suivant : le circuit commence à Paris. (Le résultat de cette question sera donné sous forme de fraction irréductible).

3. Si le circuit commence à Paris, quelle est la probabilité pour que Madrid et Rome fassent partie du circuit ? (Ce résultat sera donné sous forme de fraction irréductible)

Exercice 20

Jean possède, dans le tiroir de son armoire, 5 paires de chaussettes noires, 3 paires de chaussettes vertes et 2 paires de chaussettes rouges.

Mais, ces chaussettes sont mélangées dans le plus grand désordre et indiscernables au toucher. Lorsque Jean s'habille survient une panne de courant. Jean, qui est pressé et qui n'a pas de lampe de poche, prend au hasard deux chaussettes dans le tiroir.

1) Calculer, à 0,01 près par défaut, la probabilité pour que Jean ait tiré deux chaussettes noires.

2) Calculer, à 0,01 près par défaut, la probabilité pour que Jean ait tiré deux chaussettes de même couleur.

3) En supposant que le nombre de chaussettes vertes et le nombre de chaussettes rouges restent inchangés,

calculer quel devrait être le nombre n de chaussettes noires ($n \in \mathbb{N}^*$) contenues dans le tiroir pour que la probabilité d'avoir deux chaussettes noires soit égale à $\frac{2}{7}$?

Exercice 21

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires ; une urne B contient 3 boules rouges et 2 boules noires.
On tire au hasard une boule de l'urne A
- Si elle est noire, on la place dans l'urne B,
- Sinon, on l'écarte du jeu.

On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B.
On considère les événements suivants :
R_1 : « la boule tirée de A est rouge » , N_1 : « la boule tirée de A est noire »
R_2 : « la boule tirée de B est rouge » , N_2 : « la boule tirée de B est noire »
1) a) Calculer les probabilités des événements R_1 et N_1.
b) Calculer les probabilités des événements « R_2 sachant R_1 » et « R_2 sachant N_1 ».
En déduire la probabilité de R_2.
c) Calculer la probabilité de N_2.
2) On répète ***n*** fois l'épreuve précédente (tirage d'une boule de A suivi du tirage d'une boule de B dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus), en supposant les différentes épreuves indépendantes.
Quel nombre minimum d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99 ?

Exercice 22

Pour analyser le fonctionnement d'une machine d'atelier, on note, mois après mois, ses pannes et on remarque que :
- Sur un mois, la machine tombe au plus une fois en panne ;
- Si pendant le mois « m » la machine n'a pas de panne, la probabilité qu'elle en ait une panne le mois suivant « m+1 » est 0,24 ;
- Si la machine tombe en panne le mois « m »(ce qui entraîne sa révision), la probabilité qu'elle tombe en panne le mois suivant « m+1 » est 0,04 ;
- La probabilité que la machine tombe en panne le premier mois après sa mise en service est 0,1.

On désigne par E_n l'événement : « La machine tombe en panne le n-ième mois suivant sa mise en service » ; on note p_n la probabilité de E_n (et on a ainsi $p_1 = 0,1$).
Si A est un événement, $\overline{A}$ représente l'événement contraire.

1) a) Donner les valeurs numériques des probabilités de « E_{n+1} sachant E_n » et de « $\overline{E_{n+1}}$ sachant E_n » .

Exprimer les probabilités de « $\overline{E_{n+1}}$ et E_n » et de « E_{n+1} et E_n » en fonction de p_n.
b) Utiliser a) pour montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $p_{n+1} = 0,24 - 0,2p_n$.
2) a) Résoudre l'équation $p = 0,24 - 0,2p$.

b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $u_n = p_n - p$.
Montrer que (u_n) est géométrique.
En déduire les expressions en fonction de n, de u_n et de p_n.
c) Donner la limite de (p_n).

Exercice 23

Dans tout l'exercice, A et B étant deux événements, P(A) désigne la probabilité de A ; P(B/A) la probabilité de B sachant que A est réalisé .
1) Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité : $p_i = P(X = i)$

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

a) Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X .
b) Calculer l'espérance mathématique de X et sa variance.
2) Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients.
On considère les événements suivants :
C_1 : « en cinq minutes, un seul client se présente » ;
C_2 : « en cinq minutes, deux clients se présentent » ;
E : « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence »
a) Calculer $P(C_1 \cap E)$.
b) Montrer que $P(E/C_2) = 0,42$ et calculer $P(C_2 \cap E)$.
c) En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.
3) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes ; déterminer la loi de probabilité de Y.