PROBABILITES CONDITIONNELLES

AMADOU LAMINE NDIAYE

Exercice 1

1 En remarquant que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, justifier que $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

2 Démontrer que si A et B sont indépendants alors les évènements suivants le sont aussi :

- **a** A et $\overline{B}$
- **b** $\overline{A}$ et B
- **c** $\overline{A}$ et $\overline{B}$

Exercice 2

A et B sont deux évènements indépendants d'une expérience aléatoire.
Sachant que $P(A) = 0,34$ et $P(B) = 0,56$; déterminer les probabilités suivantes :

- **a** $P(A \cup B)$
- **b** $P(A \cup \overline{B})$
- **c** $P(\overline{A} \cup B)$
- **d** $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

Exercice 3

A et B sont deux évènements d'un univers Ω muni d'une loi de probabilité.
Sachant que $P(A) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$; déterminer $P(B)$ lorsque :

- **a** A et B sont incompatibles.
- **b** A est inclus dans B.

Exercice 4

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement :
U_1 : 3 boules rouges et 2 boules vertes.
U_2 : 2 boules rouges et 1 boule verte.
On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.
Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge.

Exercice 5

On dispose de 3 urnes : U_1 ; U_2 et U_3.
U_1 contient 2 blanches et 4 boules vertes.
U_2 contient 5 blanches et 3 boules jaunes.
U_3 contient 2 jaunes et 8 boules noires.
On extrait au hasard une boule de l'urne U_1. Si elle est blanche, on tire alors une boule de U_2, sinon on tire une boule de U_3.

1 Quelle est la probabilité d'extraire une boule blanche de U_1 au premier tirage ?

2 Quelle est la probabilité d'obtenir une boule jaune au 2^e tirage sachant qu'on a obtenu une boule blanche au 1^{er} tirage ?

3 Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire à l'issue du jeu ?

4 Quelle est la probabilité d'obtenir une boule jaune à l'issue du jeu ?

Exercice 6

Lors d'un devoir de mathématiques standardisé en TS_2 au **CSPA**, un sujet commun peut être proposé par trois professeurs : M. SY, M. DIOH et M. NDIAYE.
Soit **A**, **B** et **C** les évènements suivants :
A : " le sujet est proposé par M. SY "
B : " le sujet est proposé par M. DIOH "
C : " le sujet est proposé par M. NDIAYE "
Compte tenu de l'expérience des années précédentes, on a : $P(A) = 0,35$; $P(B) = 0,4$ et $P(C) = 0,25$.
Les élèves craignent un sujet portant sur la probabilité et connaissant leurs professeurs, pronostiquent :
$P(D/A) = 0,2$; $P(D/B) = 0,5$ et $P(D/C) = 0,25$ où D désigne l'évènement : "le sujet proposé porte sur la probabilité ".

1 Calculer la probabilité pour que le sujet proposé ne porte pas sur la probabilité.

2 Le sujet porte sur la probabilité, quelle est la probabilité qu'il ait été donné par M. DIOH ?

Exercice 7

Une grave maladie affecte le cheptel bovin d'un certain pays. On estime que 7% des bovins sont atteints. On vient de mettre au point un test pour diagnostiquer la maladie et on a établi que :
· Quand un animal est malade, le test est positif dans 87% des cas.
· Quand un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 98% des cas.
On note F l'évènement " être malade " et T l'évènement " avoir un test positif ".

1 Calculer la probabilité des évènements suivants :

- **a** "F et T"
- **b** "$\overline{F}$ et $\overline{T}$"
- **c** "F et $\overline{T}$"

2 En déduire la probabilité de T.

3 Quelle est la probabilité pour qu'un animal ayant un test négatif soit malade ?

☞ Exercice 8

Un sondage est effectué dans une société comprenant 40% de cadres et 60% d'employés. On sait que 20% des cadres et 10% des employés savent parler l'anglais. On interroge un individu au hasard.

1 Quelle est la probabilité que ce soit :

- **a** Un cadre qui sache parler l'anglais ?
- **b** Un employé qui sache parler l'anglais ?
- **c** Une personne qui sache parler l'anglais ?

2 L'individu sait parler l'anglais.
Quelle est la probabilité que ce soit un employé ?

☞ Exercice 9

Pendant le Ramadan,une enquête a été menée sur un échantillon d'une population, on distingue D l'évènement suivant " la personne interrogée est un diobeene " et W " elle a jeûné durant tout le Ramadan. On obtient les résultats suivants :
$P(D) = 0,4$; $P(W/D) = 0,3$ et $P(D/W) = \frac{4}{9}$.
On suppose que D et W n'influent pas entre eux.
Quelles sont les probabilités pour qu'une personne choisie soit :

- **a** Un diobeene et un jeûneur.
- **b** L'un à l'exclusion de l'autre.
- **c** Ni l'un ni l'autre

☞ Exercice 10

Aux parcelles assainies, le temps au petit jour suit la loi suivante :

temps	pluie	nuages	ciel bleu
probabilité	$0,2$	$0,5$	$0,3$

Monsieur DIOH prend son parapluie en partant le matin avec une probabilité de :
1 s'il pleut.
$0,6$ s'il y a des nuages.
$0,2$ si le ciel est bleu.
Calculer la probabilité que M.DIOH parte en emportant son parapluie le 14 Juin 2024.

☞ Exercice 11

Un fabriquant de chaussures possède trois machines **A**, **B**, **C** qui fournissent respectivement 10% ; 40% et 50% de la production totale de son usine. Une étude a montré que le pourcentage de chaussures défectueux est de $3,5\%$, pour la machine **A**, de $1,5\%$ pour la machine **B** et de $2,2\%$ pour la machine **C**. Après fabrication, les chaussures sont versées dans un bac commun aux trois machines.
On choisit au hasard,une chaussure dans le bac.

1 Montrer que la probabilité que cette chaussure provienne de la machine **C** et soit défectueuse est $0,011$.

2 Calculer la probabilité que cette chaussure soit défectueuse.

3 Calculer la probabilité que cette chaussure provienne de la machine **C** sachant qu'elle est défectueuse.

☞ Exercice 12

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de **1** à **6**. Le troisième dé est spécial : trois de ses faces sont numérotées **6**, les trois autres sont numérotées **1**.
On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.
On note A l'événement : " les deux dés tirés sont normaux."
On note B l'événement : "les deux faces supérieures sont numérotées **6**"

1 **a** Définir l'événement contraire de A, qu'on notera $\overline{A}$.
b Calculer les probabilités de A et de $\overline{A}$.

2 **a** Calculer $p(B/A)$, puis $p(A)$.
b Calculer $p(B)$.

3 Calculer $p(A/B)$

☞ Exercice 13

Un club sportif compte 80 inscrits en natation, 95 en athlétisme et 125 en gymnastique.
Y Chaque inscrit pratique un seul sport.
Les résultats demandés seront donnés sous forme décimale à 10^{-2} près.

1 On demande à trois inscrits choisis au hasard de remplir un questionnaire. Calculer les probabilités des évènements suivants :

- **a** **A** : " les sportifs choisis pratiquent tous l'athlétisme ".
- **b** **B** : " les sportifs choisis pratiquent tous le même sport ".

2 Parmi les inscrits en natation 45% sont des filles. De même 20% des inscrits en athlétisme et 68% des inscrits en gymnastique sont des filles.

- **a** On choisit au hasard un inscrit.
Quelle est la probabilité p_1 que l'inscrit choisi soit une fille pratiquant l'athlétisme ?
Quelle est la probabilité p_2 que ce soit une fille ?
- **b** Si on choisit au hasard une fille, quelle est la probabilité p_3 qu'elle pratique l'athlétisme ?

☞ Exercice 14

Une étude dans une grande ville adonné les résultats suivants : 73% des personnes ont un vélo, 19% ont des jakarta et 17% possèdent les deux.
On note V l'événement : " la personne a un vélo " et J l'événement " la personne a un jakarta "

1 On considère dans un premier temps que la population de cette ville est composée de 100000 personnes. Compléter le tableau :

	V	$\overline{V}$	Total
R			
$\overline{R}$			
Total			10000

Reprendre le même tableau avec uniquement des pourcentages (Total 100%)

2 On désigne une personne au hasard dans l'annuaire de la ville.

a Déterminer la probabilité que cette personne ait soit un vélo soit un jakarta.

b Déterminer la probabilité que cette personne n'ait ni vélo ni jakarta.

c Quelle est la probabilité que cette personne ait un jakarta mais pas un vélo ?

d La personne contactée affirme tout de suite posséder un vélo. Quelle est la probabilité qu'elle ait alors aussi un jakarta ?

☞ Exercice 15

Parmi la clientèle d'une vendeuse de pains " Anta mbourou ", une enquête montre que 75% des abonnés ont souscrit à l'option " pain baguette ", 50% des abonnés ont souscrit à l'option " pain croissant" et 30% des abonnés ont souscrit aux deux options.
On note les événements B : "l'abonné a souscrit à l'option pain baguette" et C : " l'abonné a souscrit à l'option pain croissant ".

1 Donner les valeurs de $P(B), P(C)$ et $P(B)$.

2 Compléter le tableau de probabilités :

	C	$\overline{C}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			100%

3 Calculer $P_C(B)$.

4 Déterminer la probabilité qu'un abonné ait choisi l'option "pain croissant" sachant qu'il a souscrit à l'option "pain baguette"

☞ Exercice 16

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On imagine n sacs de jetons $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$
Au départ le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc.
On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectué de la façon suivante :
·1^{er} étape : on tire au hasard un jeton de S_1.
·2^e étape : on place ce jeton dans S_2 et on tire au hasard un jeton de S_2
·3^e étape : après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2, on tire au hasard un jeton de S_3 . . . et ainsi de suite . . . Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note E_k l'évènement : " le jeton sorti de S_k est blanc, et $\overline{E_k}$ l'évènement contraire.

1 **a** Déterminer la probabilité de E_1 notée $P(E_1)$ et les probabilités conditionnelles $P(E_2/E_1)$ et $P(E_2/\overline{E_1})$. En déduire la probabilité de E_2, notée $P(E_2)$

b Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité de E_k notée p_k.
Justifier la relation de récurrence suivante : $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$

2 Etude d'une suite (u_n).
On note (u_k) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3} \end{cases}$$

a On considère la suite (v_k) définie par : pour tout $k \in \mathbb{N}^*; v_k = u_k - \frac{1}{2}$
Démontrer que la suite (v_k) est une suite géométrique.

b En déduire l'expression de u_k en fonction de k.
Montrer que la suite (u_k) est convergente et préciser sa limite.

3 Dans cette on suppose que $n = 10$.
Déterminer pour quelles valeurs de k on a : $0,4999 < p_k < 0,5$

☞ Exercice 17

Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique et dispose d'un répondeur.
Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement son répondeur.
Quand il est présent, il le branche une fois sur trois.
Quand un client téléphone, il a quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur et une chance sur cinq d'obtenir l'artisan.
Un client téléphone à l'artisan.
On note :
R l'événement " le client obtient le répondeur "
A l'événement " l'artisan est présent"
$\overline{A}$ " l'événement contraire de A

1 Déterminer la probabilité $P(R)$, ainsi que les probabilités conditionnelles $P(R/A)$ et $P(R/\overline{A})$.

2 **a** En déduire l'égalité $\frac{4}{5} = -\frac{2}{3}P(A) + 1$.

b Calculer la probabilité que l'artisan soit présent.

3 Un client téléphone ; il obtient le répondeur.
Déterminer la probabilité que l'artisan soit présent.

☞ Exercice 18

René et Ablaye jouent à un jeu de société dans lequel il n'y a pas d'égalité.
Les deux joueurs ont la même probabilité de gagner la première partie.
En revanche si René gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est $0,7$ et s'il perd, la probabilité qu'il perde la suivante est $0,9$.
n étant un entier naturel non nul, on note G_n l'événement : " René gagne la n-ième partie. "

Partie A : Deux parties

On suppose, ici que René et Ablaye font deux parties.

1 Décrire l'énoncé à l'aide d'un arbre de probabilité.

2 Calculer la probabilité que René gagne les deux parties.

3 Démontrer que $P(G_2) = 0,4$

4 Sachant que René a gagné la deuxième partie, quelle est la probabilité qu'il ait gagné la première ?

5 Les événements G_1 et G_2 sont-ils indépendants ?

Partie B : Plusieurs parties

On suppose ici que les joueurs font plusieurs parties.
n étant un entier naturel non nul, on pose $p_n = P(G_n)$.

1 A l'aide de l'énoncé, donner les valeurs de p_1 ; $P_{G_n}(G_{n+1})$ et $P_{\overline{G_n}}(G_{n+1})$

2 Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,1$.

3 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = p_n - 0,25$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

4 Exprimer v_n en fonction de n puis p_n en fonction de n.

5 Calculer la limite de la suite (p_n) et interpréter ce résultat.

☞ Exercice 19

Au **CSPA**, toutes les semaines, on fait appel à un technicien pour l'entretien de la photocopieuse. On a pu constater que :
− le technicien vient la première semaine.
− s'il intervient la semaine n, alors la probabilité qu'il intervienne la semaine $n + 1$ est $0,75$.
− s'il n'intervient pas la semaine n, alors la probabilité qu'il intervienne la semaine $n + 1$ est $0,1$
On note A_n l'événement " le technicien intervient la semaine n " et p_n la probabilité de l'événement A_n.

1 Quelle est la valeur de p_1 ? Dessiner un arbre décrivant la situation.

2 Exprimer $P(A_{n+1} \cup A_n)$ puis $P(A_{n+1} \cup \overline{A_n})$ en fonction de p_n

3 En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n

4 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - \frac{2}{7}$

- **a** Démontrer que (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
- **b** En déduire l'expression de u_n puis p_n en fonction de n.

5 Au bout de combien de semaines la probabilité que technicien intervienne deviendra-t-elle inférieure à $0,5$? Cette probabilité peut-elle devenir inférieure à $\frac{1}{4}$? Justifier.

☞ Exercice 20

Sadio Mané est un joueur de Liverpool. Pour l'aanée $2021 - 2022$, il revient d'une blessure pour le premier match du championnat et la probabilité qu'il marque pour ce premier match est de **0,1**. Après le premier match, il s'est complètement remis de sablessure et ses chances de marquer dans un match ont agmenté. On suppose que si Mané marque pour un match, la probabilité qu'il marque le match suivant est de **0,3** et s'il ne marque pas, la probabilité qu'il ne marque pas le match suivant est de **0,9**.
n étant un entier naturel non nul, on note M_n l'événement : "Mané marque pour le n-ième match."

Partie A : Nous sommes à la 2^e journée

Ici, on suppose que Mané a joué les deux premières journées.

1 Décrire l'énoncé à l'aide d'un arbre de probabilité.

2 Calculer la probabilité que Mané marque les deux premiers match.

3 Démontrer que $p(M_2) = 0,12$.

4 Sachant que Mané a marqué le deuxième match, quelle est la probabilité qu'il ait marqué le premier match ?

5 Les événements M_1 et M_2 sont-ils indépendants ?

Partie B : Mané a joué plusieurs match

On suppose ici que Mané a joué plusieurs match consécutifs.
n étant un entier naturel non nul, on pose $p_n = P(M_n)$.

1 A l'aide de l'énoncé, donner les valeurs de p_1; $P_{M_n}(M_{n+1})$ et $P_{\overline{M_n}}(M_{n+1})$.

2 Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,1$.

3 Pour tout entier naturel non nul, on pose $v_n = p_n - 0,125$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison et le premier terme.

4 Exprimer v_n en fonction de n puis p_n en fonction de n.

5 Calculer la limite de la suite (p_n)

Partie C : Finale de la ligue des championnats le 28 Mai 2022

Pour la préparation du match de la finale contre le Réal Madrid, l'entraineur Jorgen Klopp prévoit des séances de tir au but pour une éventuelle série de pénalties en finale. Pour celà, il fait tirer à Sadio Mané 5 pénalties. L'expérience a montré que la probabilité que Mané marque un pénalty est de $\dfrac{1}{4}$.
On suppose que les résultats des 5 tirs au but de Mané sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pénalties marqué par Mané pendant ces 5 tirs au but.

1
- **a** Déterminer la loi de probabilité de X.
- **b** Calculer l'espérance mathématique et la variance associée.

2 Mané est austorisé à participer aux tirs au but pour une éventuelle série de pénalties en finale s'il marque au moins 3 pénalties pendant ce séance de 5 pénalties.
Quelle est la probabilité que Mané participe à un éventuel tir au but en finale ?