

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

- Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
 - $z_1 = (1 - i)(5 + i)$
 - $z_2 = (2 - 3i)^2$
 - $z_3 = \frac{1}{3 + 2i}$
 - $z_4 = \frac{4 - 5i}{3 + 2i}$
- Ecrire en fonction de $\bar{z}$ les conjugués des nombres complexes suivants :
 - $z_1 = 1 + iz$
 - $z_2 = i(z + 3)$
 - $z_3 = \frac{1 - z}{1 + iz}$
 - $z_4 = \frac{1 + 3z}{i + 2z}$
- Déterminer un argument de z dans chacun des cas suivants :
 - $z = -1 + i$
 - $z = \sqrt{6} + i\sqrt{6}$
 - $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - $z = (2 + 2i)(1 - i)$
 - $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$
 - $z = (-1 - i)^4$

Exercice 2

Le plan est muni d'une repère orthonormé direct.

- Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant :
 - $|z - 3| = |z + i|$
 - $|iz + 3| = |z + 4 + i|$
 - $|\bar{z} + \frac{1}{3}i| = 3$
 - $|z - \bar{z} + i| = 2$
 - $|\bar{z} - 2 + i| = |z + 5 - 2i|$
- Pour tout nombre complexe $z \neq -1 + 2i$, on pose $Z = \frac{z - 2 + 4i}{z + 1 - 2i}$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que
 - $|Z| = 1$
 - $|Z| = 2$
 - Z soit un réel.
 - Z soit un imaginaire pur.
- Pour tout complexe $z \neq i$, on pose $U = \frac{z + i}{z - i}$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
 - $U \in \mathbb{R}_+^*$
 - $U \in \mathbb{R}_+^*$
 - $U \in i\mathbb{R}$

Exercice 3

- On pose $z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.
 - Déterminer un argument de z_1 ; z_2 et z_3 .
 - En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.
 - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x$. Résoudre l'équation $f(x) = 2\sqrt{2}$ dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$.
- On considère les nombres complexes : $a = 1 - i$; $b = 1 - i\sqrt{3}$ et $Z = \frac{a^5}{b^4}$.
 - Déterminer une écriture trigonométrique de Z .
 - Déterminer une écriture cartésienne de $\frac{Z}{12}$. En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$.
 - Calculer Z^{12} et Z^{2012} .
 - Pour quelles valeurs de l'entier naturel n : Z^n est un réel. Z^n est un imaginaire pur.

Exercice 4

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
 - $\bar{z} = i - z$; b. $2z + \bar{z} = i - z$; c. $z^2 = |\bar{z}|$; d. $2z^2 - 6z + 5 = 0$ e. $z^2 + z + 1 = 0$; f. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$; g. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$; h. $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$; i. $4z^2 - 2z + 1 = 0$
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes sachant qu'elle admette une solution réelle :
 - $z^3 - (1 + i)z^2 - 2(1 + i)z + 8 = 0$
 - $iz^3 + (3 - 5i)z^2 + (16 - 2i)z + 30i = 0$
- Résoudre chacune des équations suivantes sachant qu'elle admette une solution imaginaire pure :
 - $z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i = 0$
 - $z^3 + (5i - 1)z^2 - (4i + 7)z + 3 - 3i = 0$

Exercice 5

Soit l'équation (E) : $z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 7iz + 3(1 - 3i) = 0$

- Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
- Résoudre l'équation (E)

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points $A; B; C$ et D d'affixes respectifs $z_A = 3i$; $z_B = 1 - i$; $z_C = 1 + 2i$ et $z_D = i$

- Placer ces points.
- Quelle est la nature du triangle ACD ?
- Soit $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, -2)\}$.
Démontrer que les points A, D et G sont alignés.

Exercice 6

- Résoudre l'équation :
 $2(1 - \cos 2\alpha)z^2 - 2\sin(2\alpha)z + 1 = 0$; où α est une valeur de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
- Déterminer le module et un argument des solutions z_1 et z_2 .
- Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Déterminer α pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O

Exercice 7

Soit $(E) : z^3 + (3 + 2i)z^2 - (9 + i)z + 14 - 18i = 0$.

- Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure à préciser puis achever la résolution de l'équation (E) .
- Dans le plan complexe, on considère les points $A(z_0 = -2i)$; $B(z_1 = 2 + i)$ et $C(z_2 = 5 - i)$.
 - Déterminer le module et un argument de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$
 - En déduire la nature du triangle ABC .
- On pose $Z = \frac{z - z_0}{iz - \bar{z}_2}$ avec $M(z)$ et $K(1 - 5i)$.
 - Interpréter géométriquement $|Z|$ et $\arg(Z)$
 - Déterminer géométriquement et représenter dans chaque cas l'ensemble des points $M(z)$ tels que :
 - $|Z| = 1$
 - $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Exercice 8 Pour tout nombre complexe z , on définit le polynôme

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$$

- Vérifier que le polynôme admet une racine réelle.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$, $P(z) = 0$.
On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, avec z_1 ayant la partie imaginaire positive.
 - Vérifier que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$.
 - Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2
- Placer dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 2cm), les points A d'abscisse 2, B et C d'abscisses respectifs z_1 et z_2 et I milieu de $[AB]$.
 - Démontrer que le triangle OAB est isocèle.
En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{OI})$
 - Calculer l'abscisse z_I de I puis le module de z_I

- Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

Exercice 9 Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^4 - (2 - i)z^3 - 3iz^2 + (4 - i)z + 1 + 3i = 0$$

- Montrer que (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2
- Déterminer les autres solutions de (E) .
- On désigne par $A(z_1)$; $B(z_2)$; $C(z_3)$ et $D(z_4)$ avec z_1, z_2, z_3 et z_4 les solutions de (E)
 - Montrer que $Z = \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \times \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ est réel.
 - Que peut-on en déduire des points A, B, C et D ?

Exercice 10 Soient les points $A(2i)$, $M(z)$ et $M'(z')$ tels que $z' = \frac{2iz - 5}{z - 2i}$.

- On pose $z = x + iy$.
 - Montrer que $\text{Im}(z) = \frac{2x^2 + 2y^2 + y - 10}{x^2 + (y - 2)^2}$
 - Déterminer alors l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit un réel
- Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|2\bar{z} + 4i|$.
- Montrer que $(z' - 2i)(z - 2i) = -9$
 - Montrer que $AM' \times AM = 9$.
 - Montrer que $(\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \pi + 2k\pi$
 - En déduire l'ensemble Δ des points $M(z)$ tels que $\arg(z' - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Exercice 11

- Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^3 = 1$
- Développer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$
 - Soit l'équation $(E) : z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$.
En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$; déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E) .
- En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

Exercice 12 Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Calculer j^2 ; j^3 et $1 + j + j^2$
- Soit (E) l'équation $z^4 + z^2 + 1 = 0$
 - Vérifier que j est solution de (E) .
 - Déduire de ce qui précède une factorisation dans $\mathbb{R}$ de $P(x) = x^4 + x^2 + 1$

Exercice 13 Soit a, b et c trois complexes non nuls de même module et vérifiant $a + b + c = 0$

- On pose $p = \frac{a}{c}$ et $q = \frac{b}{c}$
 - Prouver que $|p| = |q| = 1$
 - Prouver que $p + q = -1$
 - En posant $p = x + iy$, déduire que $p = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $p = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Soit A d'affixe a , B d'affixe b et C d'affixe c .
- Prouver que O est le centre de gravité du triangle ABC .
 - Prouver que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O .

Exercice 14 Soit a, b et c trois complexes non nuls de même module.

- On pose $W = \bar{b}c - b\bar{c}$. Prouver que W est un nombre imaginaire pur.
- On pose $t = \frac{b+c}{b-c}$. Prouver que t est un imaginaire pur.
- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $A(a), B(b)$ et $H(a+b+c)$.
 - Prouver que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) = \arg(t)[2\pi]$.
 - En déduire que $(CB) \perp (AH)$.

Exercice 15 Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1. Soit $Z = \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$

- Montrer que Z est un réel positif.
- Soit z un nombre complexe. Montrer que $|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- Soient deux points A et B d'affixes respectives a et b où a et b sont deux complexes non nuls. Calculer en fonction de a et b l'affixe z_I du point I barycentre des points A et B affectés respectivement aux coefficients $|a|$ et $|b|$.

Exercice 16

- On pose $Z = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\beta}}{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}$ où $0 < \alpha < \pi$ et $0 < \beta < \pi$. Prouver Z est un nombre imaginaire pur.
- On pose $W = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} + 1}$ où $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Prouver que $W = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit A d'affixe $e^{i\alpha}$, B d'affixe $e^{i\beta}$ et C d'affixe $-e^{i\beta}$.
- Prouver que ABC est un triangle rectangle en A .
- Trouver une relation entre α et β pour que ABC soit isocèle.

Exercice 17 Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A, B, C et D sont les points d'affixes respectives $a = 2 + 2i\sqrt{3}$, $b = 2 - 2i\sqrt{3}$, $c = -4$ et $d = -1 + i\sqrt{3}$.

- Montrer que D est le milieu de $[AC]$.
- Déterminer l'affixe du point E milieu de $[AB]$.
- Montrer que le triangle ACE est rectangle en E .
- Montrer que le triangle BDA est rectangle en D .

5. Soit K le symétrique de D par rapport à E . Montrer que le quadrilatère $ADBK$ est un rectangle.

Exercice 18

1. Ecrire sous forme exponentielle :

$$a. z = \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$b. z = \frac{(1 + i\sqrt{3})(\sin x + i \cos x)}{(1 - i)(\cos x - i \sin x)}$$

2. Linéariser les expressions suivantes : $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$; $\cos^3 \theta$; $\sin^3 \theta$; $\sin^4 \theta$; $\cos^6 \theta$; $\sin^5 \theta$

Exercice 19 Soit $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$. On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.

- Démontrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive.
- Calculer $S + T$; ST ; S et T .

Exercice 20 Soit la suite z_n définie par :

$$\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = (1+i)z_n + 2i \end{cases}$$

- Calculer z_1 et z_2 .
- On considère la suite (U_n) définie par $U_n = z_n + 2$.
 - Montrer que $U_n = (2+i)(1+i)^n$.
 - Exprimer z_n en fonction de n .
- Soit $M_{n+1}; M_n; A$ et B les points d'affixes respectives : $z_{n+1}; z_n; i$ et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Démontrer que $\frac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$ et que $(\overrightarrow{BM_n}, \overrightarrow{AM_{n+1}}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

Exercice 21 On considère la suite de nombres complexes $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence : $z_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{3}z_n} + 2$ et $z_0 = 2$. On note M_n le point image de z_n dans le plan complexe.

- Ecrire sous la forme algébrique z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5 .
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par tout entier naturel n par $u_n = z_n - 1 - i\sqrt{3}$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- En déduire le terme général de (u_n) puis celui de (z_n) .
- Montrer que les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 22 On considère la suite (z_n) de nombres complexes telle que $z_0 = 0$, $z_1 = i$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$z_n - z_{n-1} = i(z_{n-1} - z_{n-2}) \quad (1)$$

1. a. On pose $v_n = z_n - z_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.
Exprimer v_n en fonction de n .
b. En déduire que $z_n = \frac{1-i}{2}(i^n - 1)$.
c. Démontrer que la suite z_n est périodique.
2. On note M_n l'image dans le plan du complexe z_n .
a. Marquer les points $M_0; M_1; M_2$ et M_3 .
b. Que peut-on dire des points $M_{100}; M_{101}; M_{102}$ et M_{103} ?
c. Interpréter en module et argument la relation (1) pour déterminer la nature de $M_n M_{n+1} M_{n+2} M_{n+3}$.

Exercice 23

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier naturel n par
$$\begin{cases} z_0 = 2 + i \\ z_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_n + 1 \end{cases}$$

On note M_n le point d'affixe z_n .

1. a. Déterminer l'affixe des points $M_1; M_2; M_3$ et M_4 .
b. Placer les points $M_1; M_2; M_3$ et M_4 .
2. On pose $\delta_n = |z_{n+1} - z_n|$.
a. Vérifier que pour tout $n \geq 1$;
$$z_{n+1} - z_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z_n - z_{n-1})$$

b. En déduire la nature de la suite (δ_n) .
c. Exprimer δ_n en fonction de n .
d. On note L_n la longueur de la ligne polygonale $M_0 M_1 \dots M_n$, déterminer L_n en fonction de n et la limite (L_n) .
3. Pour tout entier naturel n , on pose $\arg(z_n - 1 - i) = \alpha_n [2\pi]$.
a. Vérifier que $\frac{z_{n+1} - 1 - i}{z_n - 1 - i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
b. Montrer que la suite (α_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$.
c. Pour quelles valeurs les points $B(1+i); M_0$ et M_n sont-ils alignés?

Exercice 24

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $2cm$. On considère l'équation $(E) : z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

1. Résoudre l'équation (E) .
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$ pour tout $n \geq 1$.
a. Vérifier que z_1 est solution de (E) .
b. Ecrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
c. Placer les points $M_1; M_2; M_3$ et M_4 et tracer les segments $[M_1 M_2]; [M_2 M_3]$ et $[M_3 M_4]$.
3. a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a
$$z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{(-1)^n}{2} \right)$$

b. Calculer les longueurs $M_1 M_2$ et $M_2 M_3$.

4. Par suite, on admet que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $M_n M_{n+1} = 2^n \sqrt{3}$.
On note $l_n = M_1 M_2 + M_2 M_3 + \dots + M_n M_{n+1}$.
a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $l_n = 2^n \sqrt{3} (2^n - 1)$.
b. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $l_n \geq 1000$.

Exercice 25

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe

z_n défini par
$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}\right)z_n \end{cases}$$
 On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$.

1. Donne la forme exponentielle de du complexe $\frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}$.
2. a. Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
b. En déduire r_n en fonction de n .
c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Démontrer que le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} .
4. On admet que $z_n = r_n e^{in\frac{\pi}{6}}$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.