

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

- $\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln(3x-5)$
- $\ln|x+1| + \ln|x-5| = \ln 16$
- $\ln|6-x| = 1$
- $\ln^3 x - 2\ln^2 x - \ln x + 2 = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

- $\ln(x^2 - 10x + 9) \geq \ln(3x - 27)$
- $\ln(x(3-x)) \leq \ln 2$
- $2(\ln(2x))^2 - 5\ln(2x) - 3 \leq 0$

Exercice 2 Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

- $f(x) = 2x + 1 + \ln(3x - 12)$
- $f(x) = x^2 \ln(-x^2 + 6x - 5)$
- $f(x) = \ln(3x - 6) + \ln(x + 4)$
- $f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$
- $f(x) = \ln|-3x + 12|$

Exercice 3 Calculer la limite de f en x_0

- $f(x) = x^2 \ln x$ $x_0 = 0^+$
- $f(x) = x^n \ln x$ $x_0 = 0^+$
- $f(x) = \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 2x}$ $x_0 = 0$
- $f(x) = \frac{(\ln x)^4}{x^2}$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \frac{\ln(1 + 3x)}{x}$ $x_0 = 0$
- $f(x) = \frac{3x - 2 \ln x}{x + \ln x}$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \frac{\ln(1 + 2x)}{\ln(1 + x)}$ $x_0 = 0$
- $f(x) = \sqrt{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ $x_0 = 0^+$
- $f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x}$ $x_0 = 0$
- $f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{x}$ $x_0 = 0^+$
- $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$ $x_0 = 0$
- $f(x) = \ln(\cos x) \ln x$ $x_0 = 0^+$
- $f(x) = x - \sqrt{x} \ln x$ $x_0 = 0$

- $f(x) = \frac{\tan x}{\ln(1 + 2x)}$ $x_0 = 0$
- $f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \frac{x^2}{x-1} - \ln x$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \frac{\tan x \ln x}{\ln(1 + \sin x)}$ $x_0 = 0^+$
- $f(x) = \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$ $x_0 = 0$
- $f(x) = x(\ln x - 1)$ $x_0 = +\infty$ et $x_0 = 0^+$
- $f(x) = \frac{(x-1) \ln x}{x}$ $x_0 = +\infty$ et $x_0 = 0^+$
- $f(x) = \frac{\ln(x^3 + 1)}{x}$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = x^2 - \ln(x^3 + 4)$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \frac{\ln(1 + \ln x)}{x}$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = x \ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = x \ln x - (x+1) \ln(x+1)$ $x_0 = +\infty$

Exercice 4 **Partie A**

Soit $g(x) = 2x \ln(-x) + x + 1$.

- Déterminer l'ensemble de définition D_g de g .
- Calculer les limites aux bornes de D_g .
- Etudier les variations de g .
- Calculer $g(-1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$.

Partie B On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(-x) + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x(\ln x)^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interprétez graphiquement les résultats.
- Donner le domaine de dérivabilité de f puis montrer que
$$\begin{cases} f'(x) = g(x) & \text{si } x < 0 \\ f'(x) = (1 + \ln x)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

5. Etudier les branches infinies de (C_f) .
6. Dresser le tableau de variations de f .
7. Montrer que dans $]-\infty; -1[$, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α puis vérifier que $-1,8 < \alpha < -1,7$.
8. Construire (C_f) (unité 2 cm) (on précisera la tangente au point d'abscisse e^{-1} et on placera le point d'abscisse 1)

Partie C

Soit h la restriction de f à $I =]0; +\infty[$.

1. Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.
2. Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J .
3. a. Calculer $h(1)$.
b. Calculer $(h^{-1})'(2)$.
4. Construire la courbe de h^{-1}

Exercice 5 Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x + 1 - 2 \ln x$.

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. a. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$,
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. Dresser le tableau de variations de f .
c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une unique solution β et que $\beta \in]0,56; 0,57[$.
4. Construire (C) .

Partie C

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$ et (Γ) sa courbe.

1. Etudier les positions relatives de (C) et (Γ) .
2. Construire dans le même repère (Γ) .
3. Soit I_λ l'aire en unité d'aires de la partie du plan délimitée par les courbes (C) , (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$ où λ est un nombre réel strictement supérieur à 1.
a. Montrer que $I_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}(1 + \ln \lambda)$.
b. Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_\lambda$.

Exercice 6

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$

Partie A : Soit $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

1. Déterminer D_g et montrer que si $0 < x < 1$ alors $g(x) \geq 1$.
2. Montrer que g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.
3. Calculer $g(1)$ et $g(2)$. Montrer qu'il existe un unique réel α strictement positif tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
4. Donner le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B :

1. a. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .
b. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$
c. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.
3. Donner le tableau de variations de f puis tracer (C_f) .

Exercice 7 Partie A

On considère dans $]0; +\infty[$ la fonction g donnée par : $g(x) = x \ln(x) - 1$.

1. Dresser le tableau des variations de g .
2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$.
b. Montrer que $1,76 < \alpha < 1,77$.
c. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1 + x}{1 + \ln(x)}$.

1. Justifie que $D_f =]0; +\infty[- \left\{ \frac{1}{e} \right\}$.
2. Calcule les limites de f aux bornes de D_f .
3. Étudie les branches infinies à (C_f) .
4. a. Démontre que $\forall x \in D_f$,
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + \ln(x))^2}$$

b. Donne le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
c. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
5. Démontre que $f(\alpha) = \alpha$.
6. Trace la courbe (C_f) et son asymptote. (On prendra $\alpha = 1,76$)

Exercice 8 Partie A

Soit $g(x) = 2x - (x + 1) \ln(x + 1)$.

1. Déterminer le domaine de définition D_g de g .
2. Calculer les limites aux bornes de D_g .
3. Dresser le tableau de variations de g .
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions 0 et $\alpha \in]3,9; 4[$.
5. Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \ln(1+x^2) & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- Calculer les limites aux bornes de D_f .
- Etudier les branches infinies de (C_f) .
- Etudier la continuité puis la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats.
- Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$, puis encadrer $f(\alpha)$.
- Montrer que f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et $f'(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.
- Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x(x+1)\sqrt{x}}$.
- Etudier les variations de f .
- Dresser le tableau de variations de f .
- Calculer $f(-2)$.
- Tracer (C_f) .

Partie C Soit h la restriction de f sur $] -\infty; 0]$.

- Montrer que h réalise une bijection de $] -\infty; 0]$ vers un intervalle J à préciser.
- Etudier la dérivabilité de h^{-1} .
- Déterminer $(h^{-1})'(\ln 5 - 2)$.
- Tracer $(C_{h^{-1}})$.

Exercice 9 **Partie A :** On considère la fonction :

$$u : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2-1}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de u , calculer $u(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$.
- Etudier les variations de u , dresser son tableau de variations. (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).
- Déduire des résultats précédents que :
 - $\forall x \in [0; 1[, u(x) \geq 0$
 - $\forall x \in]1; +\infty[, u(x) < 0$

Partie B :

Soit g la fonction définie par :

$$g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1$$

- Déterminer D_g le domaine de définition de g , puis étudier la limite de g en 1.
- a. Vérifier que $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$
 - Montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) = 1$
 - En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.
 - Dresser le tableau de variations de g .
 - Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha \in]0; 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de d'ordre 1 de α .

- Tracer la courbe (C_g) de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : 2cm).

Partie C :

Soit la fonction définie par

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} \right)$$

- Montrer que f est dérivable sur $]0; 1[$ et que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in]0; 1[$
- Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_g) ; l'axe des abscisses; l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$

Exercice 10

Partie A

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x} - 2 - \ln x$

- Etudier les variations de g .
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$. Vérifier que $0,6 < \alpha < 0,7$.
- En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1-x)(1+\ln x) & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (1-x) \ln(1-x) & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- Etudier la continuité de f en 1.
- Etudier la dérivabilité de f en 1.
- Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- Etudier les branches infinies de f .
- Dresser le tableau de variations de f .
- Tracer C_f dans un repère orthonormé, unité : 2cm.
- Soit h la restriction de f sur $[1; +\infty[$.
 - Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations.
 - Résoudre $h^{-1}(x) = e$ puis calculer $(h^{-1})'(2-2e)$
 - Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère.

Exercice 11

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de f en x_0

- $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$ $x_0 = 0$
- $f(x) = (x + 2)e^x$ $x_0 = -\infty$
- $f(x) = x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 - e^x}$ $x_0 = 0$
- $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x^2 + 1)}$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \frac{e^x - 1}{\cos x - 1}$ $x_0 = 0$
- $f(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$ $x_0 = 0$
- $f(x) = \frac{e^x - e^{3x}}{x}$ $x_0 = 0$
- $f(x) = \frac{\ln(e^x + x)}{x}$ $x_0 = 0$
- $f(x) = \frac{e^x - 2x^2}{x + 4}$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = x^3 e^{x+2}$ $x_0 = -\infty$
- $f(x) = x^n e^x$ ($n \geq 1$) $x_0 = -\infty$
- $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{(x + 1)^3}$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \ln(e^x + 1) - x$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \frac{1}{x} \ln(e^x + e^{-x})$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ $x_0 = +\infty$
- $f(x) = \ln\left(\frac{x}{xe^{x^2} - 1 - x}\right)$ $x_0 = +\infty$

Exercice 12 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1 + e^{2-x})$. On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$; unité 2cm .

- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 1 + (1 - x)e^{2-x}$
 - Etudier les variations de h (on ne déterminera pas les limites aux bornes de D_h).
 - En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - Préciser la nature de la branche infinie de f en $-\infty$.
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter le résultat obtenu.
 - Préciser la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite d'équation $(\Delta) : y = x$
- Dresser le tableau de variations de f .
 - Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

- f^{-1} est-elle dérivable en 4?
- Etudier la position $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.
- Construire $(\mathcal{C}_f)$ (on tracera la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2)
- Construire $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le repère précédent.

Exercice 13 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} (2x - 1)e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ x \ln(x + 1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Partie A :

- Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.
- Etudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$. la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie B :

- Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$
- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $]0; +\infty[$
- Etudier les variations de $f'(x)$ puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$
- Calculer $f'(x)$ pour tout $x < 0$. En déduire le signe de $f'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de f .

Partie C :

Soit g la restriction de f sur $I =]-\infty; 0]$

- Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
- Soit g^{-1} la bijection réciproque de g . Calculer $g(-1)$ puis $(g^{-1})'(-\frac{3}{e})$
- Construire $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans un même repère.

Exercice 14 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}(1 + \ln x) - e^{-1} & \text{si } x \geq 1 \\ (1 - x)e^{-\frac{1}{1-x}} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- Etudier la continuité de f en 1.
- Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$;

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e^{-x} \left(\frac{1 - e^{x-1}}{x - 1} + \frac{\ln x}{x - 1} \right)$$
 - Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
- Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = -\ln x + \frac{1}{x} - 1$$
 - Dresser le tableau de variations de g .
 - Calculer $g(1)$ et préciser le signe de $g(x)$.
 - Calculer la dérivée de f sur chaque intervalle où elle est dérivable.
 - Etudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variations de f .

5. a. Donner la nature de la branche infinie de f en $+\infty$.
b. Montrer que la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$.
c. Etudier la position de (C_f) par rapport à (D) sur $] -\infty; 1[$.
6. Construire (C_f) .
7. Soit h la restriction de f sur $] -\infty; 1[$.
a. Montrer que h réalise une bijection de $] -\infty; 1[$ vers un intervalle J à préciser.
b. Calculer $h(0)$.
 h^{-1} est-elle dérivable en e^{-1} ? Si oui, calculer $(h^{-1})'(e^{-1})$.
c. Tracer $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 15 **Partie A :** On considère la fonction g définie par $g(x) = (x+1)^2 e^{-x} - 2$

1. Dresser le tableau de variations de g .
2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\alpha \in] -2; -1[$.
b. Donner le signe de $g(x)$ dans $\mathbb{R}$.
c. Montrer que $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.
3. Tracer la courbe (C_g) de g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité $2cm$.

Partie B :

Soit la fonction f définie par $f(x) = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$ si $x \in I = [-2; -1]$

1. Etudier les variations de f sur I .
2. En déduire que si $x \in I$ alors $f(x) \in I$.
3. Montrer que si $x \in I$ alors $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}e}$.
4. Montrer que $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ pour tout $x \in I$.
5. Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
d. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
e. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 16 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 + \frac{3e^x}{e^x+2} & \text{si } x \leq 0 \\ x+2 + \frac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et } (C_f) \text{ sa courbe représentative dans un repère orthonormé } (O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ d'unité graphique } 1cm.$$

1. Etablir que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. a. Etudier la continuité de f en 0.
b. Pour $x < 0$, montrer que $\frac{f(x)-2}{x-0} = 1 + \frac{2(e^x-1)}{x} \times \frac{1}{e^x}$.
En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.
c. Conclure sur la dérivabilité de f en 0 et interpréter les résultats.
3. a. En utilisant les variations de la h définie par $h(x) = -x$, montrer que $x < 0$ pour $x > 0$. En déduire que $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$.
b. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et utiliser 3.a pour déterminer son signe.
c. Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et donner son signe.
4. a. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition D_f .
b. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)]$ et interpréter graphiquement le résultat.
c. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)]$ et interpréter graphiquement le résultat.
d. Etudier le signe $f(x) - (x+1)$ pour $x < 0$, montrer que $f(x) - (x+2) > 0$ pour $x > 0$ et interpréter graphiquement les résultats.
5. Déterminer les coordonnées du point A de la courbe où la tangente est parallèle à l'asymptote pour $x > 0$.
6. Etablir que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
7. Représenter graphiquement les courbes de f et de f^{-1} dans un même repère.
8. Calculer $\int_{-\ln 3}^0 (f(x) - (x+1)) dx$.
9. Interpréter graphiquement le résultat précédent en terme d'aire.

Exercice 17

Partie A

On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln x + 1 - e^{-x}$.

1. Etudier les variations de g .
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $0,6 < \alpha < 0,7$.
3. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x + e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ e^{\frac{1}{2}x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Justifier que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue.
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. On pourra montrer que si $x \in] -1; 0[$;

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-\frac{1}{2} \left(\frac{e^{\frac{1}{2}x} - 1}{\frac{1}{2}x} \right) - x}{x^2 - 1}$$

4. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f puis étudier les branches infinies.
5. Dresser le tableau de variations de f .

6. Montrer que $f(\alpha) = (\alpha + 1) \ln \alpha + 1$.
7. Soit h la restriction de f à $\alpha; +\infty[$
 - a. Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.
 - b. h^{-1} est-elle dérivable sur J ? Justifier.
 - c. Calculer $h(1)$ puis $(h^{-1})'(\frac{1}{e})$
8. Tracer C_f et $C_{h^{-1}}$ dans le même repère d'unité $2cm$.
9. Soit $\lambda > 1$ et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine limité par C_h , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ et sa limite en $+\infty$

Exercice 18 Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{2x-2}$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Vérifier que pour tout réel x non nul, $f(x) = x \left[1 - 2e^{-2} \left(\frac{e^{2x}}{2x} \right) \right]$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Montrer que la droite $(D) : y = x$ est asymptote à C_f en $-\infty$. Etudier la position relative de C_f par rapport à (D) .
5. Etudier la branche infinie de C_f en $+\infty$
6. Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.
7. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in I =]0; \frac{1}{2}[$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
8. Tracer $C_f; (D)$ et (T)

Partie B

On définit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = e^{2u_n-2} \end{cases}$$

1. Soit g a fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x-2}$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$. En déduire $g(\alpha)$.
2. Démontrer que pour tout $x \in I, |g'(x)| \leq \frac{2}{e}$
3. Démontrer que pour tout $x \in I, g(x) \in I$
4. a. En utilisant l'inégalité des accroissements finis démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e} |u_n - \alpha|$.
- b. En déduire que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$.
- c. Montrer que (u_n) converge vers un réel à déterminer.
- d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-5}$

Exercice 19 Partie A

Soit la fonction h définie par $h(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

1. Dresser le tableau de variations de h .
2. a. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$.

- b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
- c. En déduire le signe de $h(x)$.

Partie B

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
3. Etudier les branches infinies de C_f .
4. Dresser le tableau de variations de f .
5. Montrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$
6. Tracer C_f dans un repère orthonormé d'unité $2cm$.

Partie C

Soit g la restriction de f à $] -\infty, -1[$.

1. Prouver l'existence de g^{-1} . Etudier la dérivabilité de g^{-1} .
2. Résoudre $g^{-1}(x) = 2$, puis calculer $(g^{-1})' \left(\frac{2 - e^{-\frac{1}{2}}}{2} \right)$
3. Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère.