CSPA **Année scolaire 2023 – 2024**

FONCTIONS NUMERIQUES

Cellule de mathématiques **Classe : TS_2**

AMADOU LAMINE NDIAYE

Exercice 1

Calculer les limites :

a $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$

b $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

c $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

d $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$

e $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x|.|x-2|}{x(x^2-x-2)}$

Exercice 2

Calculer les limites :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

b $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x-\sqrt{4x^2+1}\right)$

c $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+3x-1}}{x+5}$

d $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

e $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x^2+x+4}-2x+1\right)$

f $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

g $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{x+5}{2x-4}}$

h $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}$

i $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4x^2-3x}+2x-5\right)$

j $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x+7+\sqrt{4-2x}\right)$

k $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5x}}\right)$

Exercice 3

Calculer les limites :

a $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos(x-1)-1}{x^2+2x-3}$

b $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x-1}{x^3+x}$

c $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

d $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x-1}{2x-\sqrt{2}}$

e $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan x$

f $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\dfrac{\pi-x}{2+x}\right)$

g $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(x)}{x+1}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Exercice 4

1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors : $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x}{x+1} \leqslant 1$.

2 En utilisant les théorèmes de comparaisons, en déduire les limites :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$

b $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

Exercice 5

Soit $\varphi(x)$ une fonction définie sur $[1,+\infty[$ et vérifiant $1-x^2 \leqslant x^2\varphi(x) \leqslant 2-x^2$.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{[\varphi(x)]^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 6

1 On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\cos(x)$.

a Montrer que pour tout réel positif x, $f(x)=\dfrac{2\cos(x)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.

b Montrer que pour tout réel positif x, $|f(x)| \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

c En déduire la limite de f en $+\infty$.

2 Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+x-12}{x-3}$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 3 et détermine la fonction g qui la prolonge.

☞ Exercice 7

Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 2bx + 1}{2x^2 + ax - a - 2} & \text{si } x < \\ \dfrac{-2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 1} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{2 + c}{3} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

soit continue en 1.

☞ Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des primitives de f sur un intervalle I contenu dans son domaine de définition :

1 $f(x) = x^3 - x + 7$

2 $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - x^2$

3 $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$

4 $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x+1}}$

5 $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{2 + \sin x}}$

6 $f(x) = \sin x - 2x$

7 $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^4 x}$

8 $f(x) = x \cos x^2$

9 $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin^3 x}$

10 $f(x) = \sin^3 x$

11 $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \sin(\dfrac{5}{x})$

☞ Exercice 9

1 Déterminer la primitive F vérifiant $F(x_0) = y_0$ pour chacune des fonctions f définies par :

- **a** $f(x) = (2x - 1)^3$ et $F(0) = 0$
- **b** $f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 1)^4$ et $F(1) = 2$
- **c** $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 - 1)^2}$ et $F(2) = 0$

2 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 7}{(x+2)^2}$$

- **a** Trouver les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x+2)^2}$
- **b** En déduire la primitive F de f prenant la valeur $-\dfrac{5}{2}$ en 0.

☞ Exercice 10

1 Soit $F(x) = \dfrac{1}{1 + x^3}$ et $G(x) = -\dfrac{x^3}{1 + x^3}$.
Montrer que F et G sont deux primitives d'une même fonction :
– En calculant F' et G'.
– Sans calculer F' et G'

2 Soit $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2}$

- **a** Vérifier que $x^2 + 1 = \dfrac{1}{2}[(x+1)^2 - (x-1)^2]$
- **b** En déduire une primitive de f sur $]1; +\infty[$

☞ Exercice 11

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{(x^2 - 2x)^2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{x^3}{3} - \sqrt{1 + x^2} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

Partie A

1 Etudier le signe sur $\mathbb{R}$ du produit $(-3x^2 + 6x - 4)(x^2 - 2x)$

2 On pose $\varphi(x) = -x\sqrt{1 + x^2} - 1$

- **a** Etudier les variations de φ. En déduire que l'équation $\varphi = 0$ admet une unique solution α. Calculer la valeur de α.
- **b** Préciser le signe de φ suivant les valeurs de x.

Partie B

1
- **a** Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. Interpréter graphiquement le résultat.
- **b** Etudier la continuité de f en 0.
- **c** Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats

2
- **a** Calculer $f'(x)$ sur le domaine de dérivabilité de f.
- **b** Dresser le tableau de variations de f.
- **c** Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1. Etudier la position de T par rapport à $\mathcal{C}$ sur $]0, 2[$

Partie C

1 Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{3 - \alpha^4}{3\alpha}$.

2 Déterminer la primitive de f sur $]0, 2[$ qui s'annule en 1.

3 Construire $\mathcal{C}$ et T.

☞ Exercice 12

Partie A Soit $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1 Etudier les variations de g.

2 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution réelle α appartenant à $]1,6; 1,7[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x^3}$

1 Etudier les variations de f.

2 $\mathcal{C}_f$ représente la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- **a** Déterminer l'équation de la tangente (Δ) au point d'abscisse 0.
- **b** Vérifier que $f(x) = 1 - x + \dfrac{x^3(x-1)}{1 + x^3}$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ).
- **c** Démontrer que $\mathcal{C}_f$ est situé au dessus de sa tangente (T) au point d'abscisse 1.
- **d** Tracer $\mathcal{C}_f$, (T) et (Δ) dans le repère.

☞ Exercice 13

Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{2x^2+x} \text{ si } x\geqslant 0\\ x\sqrt{\dfrac{x}{x-2}} \text{ si } x<0\end{cases}$$

1 Démontrer que le domaine de définition $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ et étudier les limites de f aux bornes du domaine.

2 Etudier la continuité de f en 0.

3 Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.

4 Dresser le tableau de variations de f.

5 Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$. Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport aux asymptotes éventuelles.

6 Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera.

7 On note f^{-1} la bijection réciproque de f.

- **a** Donner les variations de f^{-1}.
- **b** Préciser les branches infinies à la courbe de f^{-1}.
- **c** f^{-1} est-elle dérivable en 0.
- **d** Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point d'abscisse $1-\sqrt{3}$.
- **e** Expliciter $f^{-1}(x)$.

8 Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$

☞ Exercice 14

Partie A

On donne $f(x)=2x\sqrt{|1-x^2|}$

1 Déterminer le domaine de définition de f. Ecrire f sans le symbole de la valeur absolue puis calculer les limites de f aux bornes de son domaine.

2 Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -1 puis interpréter graphiquement les résultats.

3 Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable puis établir le tableau de variations de f.

Partie B

On considère la fonction g définie par :

$$g(x)=\begin{cases} f(x) \text{ si } x\in]0;+\infty[\\ -x+\sqrt{x^2-2x} \text{ si } x\in]-\infty;0]\end{cases}$$

1 Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.

2 Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

3 Etudier la nature de la branche infinie de g en $+\infty$. Démontrer que $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote oblique en $-\infty$ puis étudier la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à cette asymptote.

4 Calculer $g'(x)$ sur les intervalles où g est dérivable puis dresser le tableau de variations de g.

5 Tracer les droites remarquables et $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm).

6 Soit h la restriction de g à l'intervalle $]-\infty,0]$.

- **a** Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera le domaine de définition.
- **b** Préciser l'ensemble de dérivabilité et les variations de h^{-1}.
- **c** Sans utiliser l'expression explicite de $h^{-1}(x)$, calculer $(h^{-1})'(2)$.
- **d** Expliciter $h^{-1}(x)$.
- **e** Tracer $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.

☞ Exercice 15

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1+\sqrt{4x^2+4} \text{ si } x\in]-\infty;0]\\ x+1+\dfrac{x}{1+x^2} \text{ si } x\in]0;+\infty[\end{cases}$$

1 Déterminer le domaine $\mathcal{D}_f$ de définition de f et étudier les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

2 Etudier la continuité de f en 0.

3 Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats.

4
- **a** Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes obliques (Δ) en $+\infty$ et (Δ') en $-\infty$. Donner une équation cartésienne de chacune d'elles.
- **b** Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ) sur $[0,+\infty[$ et celle de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ') sur $]-\infty,0]$

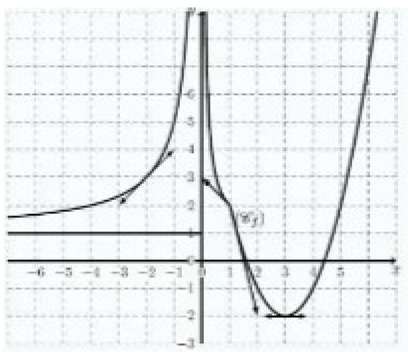
5
- **a** Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition.
- **b** Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable.
- **c** En déduire le tableau de variations de f

6
- **a** Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ à préciser.
- **b** La fonction f^{-1} est-elle dérivable en $f(0)$?
- **c** Calculer $(f^{-1})'\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]$ et $(f^{-1})'\left[f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]$

7 Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$

☞ Exercice 16

On donne ci-dessous la représentation graphique (C_f) de la fonction f :



1 Déterminer le domaine de définition de f.

2 Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

3 Déterminer $f(3)$ et $f'(3)$

4 Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse -2

5 f est-elle dérivable en 1 ? Justifier.

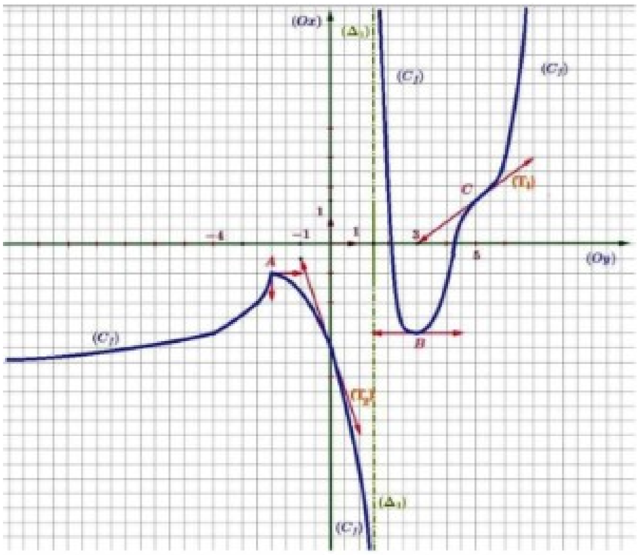
6 Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$

7 Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant -1$

8 Dresser le tableau de variations de f

☞ Exercice 17

On donne ci-dessous la représentation graphique (C_f) de la fonction f :



1 Déterminer D_f

2 Calculer $f(-4), f(0), f(3), f(4)$ et $f(5)$

3 Déterminer $f(]-\infty,-2]), f([-4,0])$ et $f(]3,+\infty[)$

4 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]4,5[$.

5 Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x)$

6 Calculer $f'(3), f'(0), f'(5)$ et $f'_d(-2)$
f est-elle dérivable à gauche en -2. Justifier.

7 Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à (C_f) au point d'abscisse 5 et l'équation de la tangente (T_1) à (C_f) au point d'abscisse 0

8 On suppose que f est dérivable sur $D_f \setminus \{-2\}$, dresser le tableau de variations de f, en déduire le signe de $f'(x)$

9 Déterminer en justifiant les limites suivantes :
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ \lim_{x\to3}\frac{f(x)+3}{x-3},$$
$$\lim_{x\to5}\frac{f(x)-2}{x-5},\ \lim_{x\to2^-}\frac{f(x)+1}{x+2} \text{ et } \lim_{x\to2^+}\frac{f(x)+1}{x+2}$$

☞ Exercice 18

On considère la fonction f dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1 ‖	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

1 **a** Préciser le domaine de définition de f et les limites de f aux bornes de D_f.

b En déduire les asymptotes à la courbe de f.

2 **a** Donner les variations de f.

b Préciser les extrémums de f.

c Préciser les solutions de l'équation $f'(x) = 0$

3 **a** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur D_f.

b En déduire le signe de $f(x)$ sur D_f.

c Préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$

4 Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0,1[$.

a Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur un intervalle à déterminer.

b Etablir le tableau de variation de g^{-1} et déterminer son ensemble de définition.

☞ Exercice 19

On considère le tableau de variation suivant, tracer la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ associée à ce tableau avec les informations suivantes puis représenter la courbe représentative $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ de la fonction réciproque sur l'intervale $I =]2,+\infty[$ donné :

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	‖	$-$	|	$+$	
f	1	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Informations :

• Branches infinies :

∗ Asymptote verticale : $x = 1$ en $+\infty$

∗ Asymptote horizontal : $y = 1$ en $-\infty$

∗ Asymptote oblique : $y = x - \dfrac{1}{2}$ en $+\infty$

• Demi-tangentes.

∗ En 0^- on a une demi-tangente d'équation $y = 0$ (demi-tangente horizontale)

∗ En 0^+ on a une demi-tangente d'équation $y = \sqrt{2}x$

∗ En 2 on a une demi-tangente verticale dirigée vers le haut d'équation $x = 2$