Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (ENSAE) Pierre Ndiaye

Test de Présélection au recrutement d'élèves Analystes Statisticiens (AS) et d'Ingénieurs Statisticiens Economiste (ISE Cycle long))

2021-2022

Exercice 1 :

Soit la fonction réelle f de variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

1) **a)** Soit y un réel donné. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $y = f(x)$.

b) En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $I_1 = f(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

c) Soit f^{-1} la bijection réciproque de f. Pour tout $x \in I_1$, déterminer alors l'expression de $f^{-1}(x)$ à l'aide de $|x|$.

d) Construire, dans un même repère orthonormé, les courbes de f et de f^{-1}.

2) On pose $f_1 = f, f_2 = f \circ f_1 , f_3 = f \circ f_2, \dots, f_n = f \circ f_{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les expressions de $f_2(x), f_3(x)$ et $f_n(x)$

b) Exprimer $f_n(x)$ en fonction de $f(nx)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $I_n = \{f_n(x)/x \in \mathbb{R}\} = f_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 :

On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par : $S_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{7}{5^3} + \cdots + \frac{3n-2}{5^n}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

2) Montrer que $S_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}S_n + \frac{3}{20}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right), \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

3) Déduire de ce qui précède que $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite majorée

4) Prouver que $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente et calculer sa limite.

Exercice 3 :

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on considère, dans $\mathbb{R}_+$, l'équation (E_n): $x^n = x + n$ et la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n - x - n$

1) En étudiant les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$, montrer que (E_n) admet une unique solution, notée x_n, telle que $x_n > 1, \forall n \geq 2$.

2) On suppose la suite $(x_n)_{n\geq 2}$, ainsi obtenue, convergente. On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$

   Calculer alors sa limite l

3) Soit ε un réel arbitraire strictement positif $(\varepsilon > 0)$.

   Montrer, en utilisant le sens de variation de f_n, l'existence d'un entier naturel $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a l'implication : $n > N \implies 1 < x_n < 1 + \varepsilon$.

   Que peut-on en déduire alors pour la suite $(x_n)_{n\geq 2}$?

Exercice 4 :

Soit $a \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. On pose $x = tg(a)$, $y = \frac{\cos(4a)}{\cos^4(a)}$ et $y = f(x)$

1) Déterminer, en fonction de x, l'expression de la fonction f ainsi définie.

2) Etudier la fonction f et construire sa courbe C dans un repère orthogonal du plan.

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

4) A quelles valeurs de a correspondent ces points ?