Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (ENSAE) Pierre Ndiaye

Test de Présélection au recrutement d'élèves Analystes Statisticiens (AS) et d'Ingénieurs Statisticiens Economiste (ISE Cycle long))

2022-2023

Exercice 1 :

A tout $n \in \mathbb{N}$ on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos^n(x)\sin(x)$.

On note par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère cartésien du plan.

1) Etudier les fonctions f_0 , f_1 *et* f_2 et tracer, dans un même repère, les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$.

2) **a)** Etudier la parité de f_n en fonction de celle de n.

b) Etudier la périodicité de f_n.

c) Montrer que $f_n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = (-1)^n f_n\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ *et* $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

d) Déduire de ce qui précède qu'il suffit d'étudier f_n sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On précisera les transformations géométriques permettant d'obtenir sa courbe globale.

3) **a)** Etudier les variations de f_n sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $n \geq 3$.

b) Déterminer, en fonction de n, la valeur maximale, y_n , prise par f_n sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

www.groupe-excellence

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Exercice 2 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme P_n défini par $P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{2n} x^k \ \forall x \in \mathbb{R}$.

1) Etudier et représenter graphiquement P_2.

2) On pose $\varphi_n(x) = 2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Etudier les variations de φ_n sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier l'existence d'un unique réel $\alpha_n \in]-1, 0[$ tel que $\varphi_n(\alpha_n) = 0, n \in \mathbb{N}^*$.

3) **a)** Déduire de (2) l'étude des variations de P_n sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $P_n(x) \geq P_n(\alpha_n) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 3 :

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ telle que $U_1 = 1$ et $U_n = U_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 2$.

1) **a)** Exprimer U_n à l'aide de symbole Σ, puis montrer que $\sqrt{n} \leq U_n \leq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire la nature de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} V_n = 2\sqrt{n} - U_n \\ W_n = 2\sqrt{n+1} - U_n \end{cases}$

a) Montrer que (V_n) et (W_n) sont deux suites adjacentes.

b) Soit l leur limite commune.

Déterminer n_0 pour que V_{n_0} soit une valeur approchée par défaut de l à 10^{-3} près.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{\sqrt{n}}$.

3) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre S_n, U_n, U_{2n}.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.

www.groupe-excellence.sn

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Exercice 4 :

Dans une urne U_1, on place **4** jetons portant le nombre **100** et **3** jetons portant le nombre **200**. On extrait simultanément et au hasard **3** jetons de U_1 et on note par S la somme des nombres inscrits sur ces **3** jetons.

1) **a)** Déterminer toutes les valeurs possibles de S.

b) Déterminer le nombre de tirages correspondant à :

i) $S = 400$

ii) $S = 500$

2) On considère une seconde urne U_2 contenant **3** jetons marqués **100** et **2** jetons marqués **200**. Un tirage consiste à extraire un jeton de U_1 puis un jeton de U_2.

a) Calculer le nombre de tirages possibles.

b) Calculer le nombre de tirages donnant **2** jetons donnant le même nombre.

www.groupe-excellence.sn