Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (ENSAE) Pierre Ndiaye

Test de Présélection au recrutement d'élèves Analystes Statisticiens (AS) et d'Ingénieurs Statisticiens Economiste (ISE Cycle long))

2020-2021

Exercice 1 :

A tout réel α donné tel que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on associe la fonction f_a telle que

$$f_a(x) = \frac{(\alpha^2 + 1)x^2 + \alpha^2 - 1}{(\alpha + 1)x + \alpha - 1}$$

. On désigne par C_α la courbe représentative de f_a.

1) Montrer que C_α admet deux asymptotes dont on précisera, pour chacune, une équation cartésienne.

2) Soit I_α le point d'intersection de ces deux asymptotes.

   a) Déterminer, en fonction de α, les coordonnées de I_α.

   b) Que représente I_α pour la courbe C_α ?

   c) Montrer que $\forall\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, I_α appartient à une courbe C d'équation :

$y = g(x)$ où g est une fonction que l'on précisera.

   d) Etudier la fonction g et tracer C.

3) Etudier, suivant les valeurs de α, les variations de f_a.

4) Représenter (dans un autre repère) les courbes $\mathcal{C}_{-2}, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$.

Exercice 2 :

1) Soit $\boldsymbol{g}$ la fonction définie par $g(x) = \frac{\tan x}{x}, \forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

   a) Déterminer $\lim\limits_{0^+} g$ et $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} g$

   b) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire les variations de la fonction $\boldsymbol{g}$.

   c) Montrer que $\boldsymbol{g}$ est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on précisera.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n, définie par :

$$f_n(x) = 2n\tan(x) - \tan(nx),\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$$

   a) Déterminer $\lim\limits_{0^+} f_n$, $\lim\limits_{\frac{\pi}{2n}^-} f_n$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f_n(x)}{nx}$

   b) En déduire que f_n s'annule au moins une fois sur $\left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$ pour $n \geq 2$

   c) Soit $x_n \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

   En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\tan(nx_n)}{nx_n}$

Exercice 3 :

Soit $\boldsymbol{\varphi}$ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $\varphi(n) = C_{2n}^n$= nombre de combinaisons de $\boldsymbol{n}$ éléments parmi $\boldsymbol{2n}$ éléments.

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n+1) = 4\varphi(n) \times A$ où $\boldsymbol{A}$ est une fonction de $\boldsymbol{n}$ que l'on précisera.

2) En déduire que l'application $\boldsymbol{\varphi}$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

3) Démontrer que

$$\varphi(n) = 2^{2n}\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2n-3) \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n-2) \times (2n)}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

4) En déduire l'encadrement : $\frac{2^{2n}}{2n} < \varphi(n) < 2^{2n}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

5) Montrer qu'on a, en fait, l'encadrement suivant, plus précis :

$$\frac{2^{2n}}{2n} < \varphi(n) < 2^{2n-1} \; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 4 :

On considère les polynômes P_n et L_n définis respectivement par :

$P_0(x) = 1, P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(x-1)^n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et $L_n(x) = P_n^{(n)}(x), \forall\, n \in \mathbb{N}.$

($P_n^{(n)}$ est dérivée d'ordre n de P_n).

1) Expliciter les polynômes : $L_0(x), L_1(x), L_2(x)\ et\ L_3(x)$.
2) Montrer que $P_n(1-x) = P_n(x), \forall\, n \in \mathbb{N}$.
3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $L_n(1-x) = (-1)^n L_n(x)$.
4) Donner l'expression développée du polynôme $L_n(x), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Préciser : son degré, son coefficient dominant, son terme constant $L_n(0)$ ainsi que $L_n(1)$.

5) Montrer que $(x^2 - x)P'_n(x) = n(2x-1)P_n(x)$. En dérivant $(n+1)$ fois cette relation, en déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a
$$(x^2 - x)L''_n(x) + (2x-1)L'_n(x) - n(n+1)L_n(x) = 0$$