Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (ENSAE) Pierre Ndiaye

Test de Présélection au recrutement d'élèves Analystes Statisticiens (AS) et d'Ingénieurs Statisticiens Economiste (ISE Cycle long))

2019-2020

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\boldsymbol{cos^4(x) + sin^4(x) = 1}$

Exercice 2 :

1) Calculer $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$

2) En déduire, si n est un réel différent de $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, la résolution, dans $\mathbb{R}$, de l'équation : $\frac{3x-x^3}{1-3x^2} = \frac{3a-a^3}{1-3a^2}$

Exercice 3 :

Soit $\alpha \in]0, \pi[$, on pose $P_n = \prod_{k=1}^{k=n} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

En utilisant la relation $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$, calculer P_n en fonction de n, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$

Exercice 4 :

La suite $u(n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = 2u_n + 2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n}{2^n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et de u_0.

Exercice 5 :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique ne s'annulant pas.

1) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$,on a $\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{U_k U_{k+1}} = \frac{n+1}{U_0 U_{n+1}}$

2) **Application :** calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

Exercice 6 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $u_n > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis calculer sa limite.

Exercice 7 :

On pose $\begin{cases} u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \\ v_n = 2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \end{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que (u_n) et (v_n)sont deux suites adjacentes.

2) Calculer leur limite commune.

Exercice 8 :

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, on pose : $f_n(x) = x^n + x - 1$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}_+$, une unique solution $u_n \in [0, 1]$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Exercice 9 :

1) Déterminer les constantes réelles a, b, c telles que

$$\frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$$

2) En déduire l'expression de $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$ en fonction de n, puis calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice 10 :

1) Montrer que $\cot an(\theta) - 2\cot an(2\theta) = \tan(\theta)$

2) En déduire l'expression de $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$ en fonction de n et θ.

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$

Exercice 11 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ est-elle continue en tout $m \in \mathbb{Z}$? On rappelle que $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

Exercice 12 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \forall\, x \neq 0, et\ f(0) = 0$

1) f est elle continue en 0 ? Dérivable en 0 ?
2) Sa dérivée f' est elle continue en 0 ?

Exercice 13 :

Soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Montrer que la dérivée n-ième de f vérifie

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

où $P_n(x)$ est un polynôme vérifiant la relation :

$$P_{n+1}(x) = (1 + x^2)P'_n(x) - 2(n+1)xP_n(x).$$

Exercice 14 :

Etudier, puis représenter graphiquement la fonction f telle que $f(x) = \frac{x^3+|x|}{x^2-|x|}$.

Exercice 15 :

Déterminer, suivant $n \in \mathbb{N}$, les réels a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $f(x) = \frac{x^n + ax + b}{x^2 - 1}$ puisse être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 16 :

Soit $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}$ où $n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq 2$

1) Montrer que f atteint un minimum que l'on précisera.
2) En déduire les inégalités :
   a) $(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n), \forall\, x \in \mathbb{R}_+$
   b) $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n), \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+$

Exercice 17 :

Calculer la dérivée n-ième de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{n!} x^n (1 + x^n)$

Exercice 18 :

On constitue un groupe de **6** personnes choisies parmi **25** femmes et **32** hommes. Combien peut-on ainsi former de groupes constitués :

1) Uniquement d'hommes
2) Au moins d'une femme et au moins d'un homme.

Exercice 19 :

Soient A, B, C trois ensemble finis.

1) Montrer que

$$card(A \cup B \cup C) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$$

2) **Application :** Une classe de l'ENSAE comporte **34** élèves, parmi eux : **26** sont matheux, **20** sont sportifs et **7** sont musiciens. Aucun élève ne déteste à la fois les mathématiques, le sport et la musique. De plus, **4** sont matheux musiciens, **15** matheux sportifs et **3** sont musiciens sportifs. Y a-t-il un élève satisfaisant les idéaux des Grecs, c'est-à-dire à la fois matheux, sportif et musicien ?

Exercice 20 :

Le bibliothécaire de l'ENSAE, après avoir codifié **4** livres de mathématiques, **6** livres de statistique et **5** livres d'économie, souhaite ranger ces documents sur une étagère.

De combien de façons peut-il effectuer ce rangement :

1) Si les livres doivent être groupés par matières ?

2) Si les livres de mathématiques doivent être groupés ?