Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Cours Maths TS2

Auteur : Dr. Amar Fall

Telephone : 781177433

Le programme de TS_2 comporte trois parties : **Analyse ; organisation de données et algèbre-géométrie.**

Pour l'analyse, on aura les thèmes suivants :

I. **Fonctions numériques**
II. **Suites numériques**
III. **Calcul intégral**
IV. **Equations différentielles**

Pour l'organisation de données, on aura les thèmes suivants :

I. **Dénombrement**
II. **Probabilités**
III. **Statistiques**

Pour l'algèbre-géométrie, on aura le thème suivant :

Nombres complexes

Chaque thème peut-être divisé en un seul ou plusieurs chapitres suivant sa longueur.

Ce programme est prévu pour 6 heures de cours par semaine, soit 3 séances de 2 heures par semaine.

Notre emploi du temps est le suivant :

Lundi, Mercredi et vendredi de 8h-10h à la salle 23 à chaque fois.

D'après le programme, le thème sur les fonctions numériques en TS2 contient: Limite et continuité ; dérivation et primitives ; étude de fonctions usuelles (Fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles, trigonométriques, puissances, logarithme et exponentielle). Nous allons subdiviser ce thème en **cinq** chapitres :

- **Chapitre 1 : Rappels et compléments sur les limites, la continuité et la dérivation**
- **Chapitre 2: Etude de fonctions usuelles (Fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles). (traité en exercice)**
- **Chapitre 3 : Primitives d'une fonction**
- **Chapitre 4 : Fonction logarithme**
- **Chapitre 5: Fonction exponentielle**
    - **Fonctions puissances**

CHAPITRE 1 : RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES LIMITES, LA CONTINUITE ET LA DERIVATION

Durée : 20h (Cours+td)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Déterminer les branches infinies ;
- ✓ Utiliser les théorèmes de comparaison pour calculer les limites ;
- ✓ Calculer la limite d'une fonction composée gof en un point a lorsque f admet une limite b en a et g est continue en b ;
- ✓ Calculer les limites de fonctions irrationnelles ;
- ✓ Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour rechercher une valeur approchée d'un zéro d'une fonction continue ;
- ✓ Justifier la continuité de la composée de deux fonctions.
- ✓ Justifier la dérivabilité d'une fonction composée ;
- ✓ Calculer la dérivée d'une fonction composée ;
- ✓ Restituer les notations $f', f'', \ldots\ldots, f^{(n)}$;
- ✓ Calculer les dérivées successives d'une fonction ;
- ✓ Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone ;

- ✓ Justifier l'existence d'une fonction réciproque ;
- ✓ Justifier la dérivabilité d'une fonction réciproque ;
- ✓ Calculer la dérivée d'une fonction réciproque ;
- ✓ Utiliser l'inégalité des accroissements finis.

Prérequis :

- ✓ Fonction numérique ;
- ✓ Calcul de limites ($1^{ère}$) ;
- ✓ Continuité d'une fonction ($1^{ère}$)
- ✓ Dérivation ($1^{ère}$).

Supports didactiques :

- ✓ Nouveau Transmath (Term S);
- ✓ Visa Bac ;
- ✓ CIAM Terminale SE ;
- ✓ CIAM TSM ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

2. Continuité de la composée de deux fonctions
3. Théorèmes généraux sur la continuité

III. Rappels et compléments sur la dérivation

1. Théorème
2. Dérivabilité de la composée de deux fonctions
3. Théorèmes généraux sur la dérivabilité
4. Applications de la dérivation
   a. Théorème admis
      - Exemple
   b. Dérivée et sens de variation
      - Théorème
      - Remarques
   c. Image d'un intervalle par une fonction strictement monotone
      - Théorème
      - Exemple
   d. Dérivée et bijection
      - Rappel
      - Théorème
      - Remarque
      - Théorème-définition
      - Propriété
      - Théorème
      - Exercice d'application
5. Inégalité des accroissements finis
   a. Théorème (Théorème de l'inégalité des accroissements finis)
      - Exemple
   b. Théorème (Inégalité des accroissements finis avec valeur absolue)
      - Exemple
6. Points d'inflexion
   a. Définition
   b. Théorème
   c. Exemple

Déroulement de la leçon :

Dans tout le chapitre, ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

I. Rappels et compléments sur les limites

1. Prolongement par continuité d'une fonction

a. Théorème-définition : Soit f une fonction, a et l des réels.

Si $a \notin D_f$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ alors f admet un prolongement par continuité en a et ce prolongement est la fonction notée g définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$

b. Exemple : $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Montrons que f admet un prolongement par continuité en 1 puis déterminons le.

$D_f = [0;1[\cup]1;+\infty[$

$1 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$ donc f admet un prolongement par continuité en 1. Ce prolongement par continuité est la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x \in [0;1[\cup]1;+\infty[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$

2. Etudes des branches infinies

Soit f une fonction, C_f sa courbe dans un repère orthonormé (O, I, J), a et b sont des réels.

a. Asymptotes parallèles aux axes

- Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ alors la droite $(D): x = a$ est une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées dite asymptote verticale à C_f.
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ alors la droite $(\Delta): y = b$ est une asymptote parallèle à l'axe des abscisses dite asymptote horizontale à C_f en ∞.

b. Asymptote oblique

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ avec $a \neq 0$ alors la droite $(D): y = ax + b$ est une asymptote oblique à C_f en ∞.
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $(a \neq 0)$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = b$ alors la droite $(D): y = ax + b$ est une asymptote oblique à C_f en ∞.

Exemple

Montrons que la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+4} - x$ admet une asymptote oblique en $-\infty$.

c. Branches paraboliques

- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses en ∞.

Exemple : $f(x) = \sqrt{x}$

- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en ∞

Exemple : $f(x) = x^2$

- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ avec a un réel non nul et si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - ax = \infty$ alors C_f admet une branche parabolique de direction la droite $(D): y = ax$ en ∞

Exemple : $f(x) = \sqrt{x}+x$

On montre que C_f admet une branche parabolique de direction la droite $(D): y = x$ en $+\infty$

Définition : On appelle branche infinie d'une courbe, toute droite qui est une asymptote à la courbe ou qui est une branche parabolique de la courbe.

Oralement

Lorsque C_f admet une branche parabolique en ∞ alors quand x tend vers ∞, C_f a tendance à « s'éloigner » de la branche parabolique.

3. Limites de fonctions trigonométriques

a. Limites usuelles

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (cette limite est admise).
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ (Elle peut être prouvée à l'aide de la première limite).
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (Elle peut être prouvée à l'aide la première limite).

b. Exercice d'application : Soient a et b des réels non nuls

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

Solution

- Pour $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\sin ax = 0\\ \lim\limits_{x\to 0} bx = 0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}$ donne une forme indéterminée

$\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}\times\frac{\sin ax}{ax}$. Posons $X = ax$. $\lim\limits_{x\to 0} X = 0$ donc si $x \to 0$ alors $X \to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}\times\lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin X}{X} = \frac{a}{b}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$

- Pour $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\tan ax = 0\\ \lim\limits_{x\to 0} bx = 0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}$ donne une forme indéterminée.

La même démarche permet de montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$.

- Pour $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\cos x - 1 = 0\\ \lim\limits_{x\to 0} x = 0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$ donne une forme indéterminée.

$\frac{\cos x-1}{x} = -x\times\frac{1-\cos x}{x^2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x} = 0$

c. Remarque

$\sin x$; $\cos x$ et $\tan x$ n'ont pas de limite en $\pm\infty$

4. Théorèmes de comparaison

a désigne un réel ou $a = \infty$, f, g et h sont des fonctions.

a. Théorème

- Si $\mathrm{f(x)} \geq \mathrm{g(x)}$ pour tout x appartenant à un voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{g(x)} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{f(x)} = +\infty$.

- Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x appartenant à un voisinage de a et $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exercice d'application

$f(x) = x + \sin x$

1. Montrer que $f(x) \geq x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
2. Montrer que $f(x) \leq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

b. Théorème des gendarmes

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout x appartenant à un voisinage de a et $\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = l$ avec l un réel où $l = \infty$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = l$. Ce résultat est aussi dit théorème du sandwich.

Exercice d'application

$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$

1. Montrer que $-\frac{1}{x^2} < f(x) \leq \frac{1}{x^2}$.
2. En déduire $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

c. Corollaire du théorème des gendarmes

Si $|f(x) - l| \leq g(x)$ pour tout x appartenant à un voisinage de a ($l \in \mathbb{R}$) et $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = l$

Preuve

En effet, $|f(x) - l| \leq g(x) \Rightarrow -g(x) \leq f(x) - l \leq g(x) \Rightarrow l - g(x) \leq f(x) \leq l + g(x)$

Or $\lim_{x \to a} l - g(x) = \lim_{x \to a} l + g(x) = l$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \to a} f(x) = l$

5. Limites d'une fonction composée

a. Théorème

Soient f et g des fonctions, a, b et l désignent des réels ou ∞. Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim_{x \to b} g(x) = l$ alors $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = l$.

Exemple

On donne $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Calculons $\lim_{x\to+\infty} \frac{3f(x)}{3+f(x)}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{3f(x)}{3+[f(x)]^2}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{3f(x)}{3+f(x)}$?

$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} 3f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} 3 + f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{3f(x)}{3+f(x)}$ donne une forme indéterminée

Posons $g(x) = \frac{3x}{3+x}$; $\frac{3f(x)}{3+f(x)} = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{3f(x)}{3+f(x)} = \lim_{x\to+\infty} (g \circ f)(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 3$ donc $\lim_{x\to+\infty} (g \circ f)(x) = 3$

d'où $\lim_{x\to+\infty} \frac{3f(x)}{3+f(x)}$.

La même démarche permet de calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{3f(x)}{3+[f(x)]^2}$

b. Corollaire

Le théorème ci-dessus permet d'obtenir les tableaux des limites suivantes :

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \geq 0$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)}$	$\sqrt{l}$	$+\infty$

et

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	∞
$\lim_{x\to a} \lvert f(x)\rvert$	$\lvert l\rvert$	$+\infty$

Preuve (Orale)

Pour le premier tableau, posons $g(x) = \sqrt{x}$; $\sqrt{f(x)} = (g \circ f)(x)$ donc

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = l \geq 0$ alors $\lim_{x\to l} g(x) = \sqrt{l}$ d'où $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = \sqrt{l}$
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ d'où $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = +\infty$

Pour le deuxième tableau, posons $g(x) = |x|$; $|f(x)| = (g \circ f)(x)$ donc

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x\to l} g(x) = |l|$ d'où $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = |l|$
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ alors $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ d'où $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = +\infty$

Exemple

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left|\frac{-2x+5}{x-1}\right|$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x+5}{x-1} = -2$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \left|\frac{-2x+5}{x-1}\right| = 2$

II. Rappels et compléments sur la continuité

1. Théorème des valeurs intermédiaires

a. Théorème

Si f est continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle. Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue sur cet intervalle est un intervalle. Ce théorème est dit théorème des valeurs intermédiaires.

b. Corollaire

Si f est continue sur $[a; b]$ alors pour tout nombre réel l compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = l$ (d'inconnue x) admet au moins une solution dans $[a; b]$. Autrement dit il existe au moins un réel $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = l$.

En particulier si f est continue sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.

c. Encadrement d'un zéro d'une fonction continue

Exemple : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[1; 2]$.
2. Donner un encadrement à 10^{-1} près d'une solution de l'équation $f(x) = 0$.
3. En déduire une valeur approchée à 10^{-1} près d'une solution $f(x) = 0$.

Solution

1. f est une fonction polynôme donc f continue sur $[1; 2]$; $f(1) = -2$ et $f(2) = 3$. Par suite $f(1) \times f(2) \leq 0$ d'où l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[1; 2]$.
2. Trouver un encadrement à 10^{-1} près consiste à trouver un encadrement entre deux nombres décimaux d'ordre 1 (c'est-à-dire à un chiffre après la virgule) qui sont consécutifs. Comme on a trouvé au moins une solution dans $[1; 2]$, on va balayer l'intervalle $[1; 2]$ avec des nombres décimaux à un chiffre après la virgule.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	-2	-1,968	-1,864	-1,676	-1,392	-1	-0,488	0,156			3

Ainsi $f(1{,}6)\times f(1{,}7)\leq 0$ donc l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $[1{,}6;1{,}7]$ et on a : $1{,}7-1{,}6=0{,}1=10^{-1}$. Cette méthode est connue sous le nom de la méthode par balayage.

3. Comme on a au moins une solution dans $[1{,}6;1{,}7]$ alors toute valeur $x\in[1{,}6;1{,}7]$ est une valeur approchée 10^{-1} près d'une solution de $f(x)=0$. En effet, si α est une solution dans $[1{,}6;1{,}7]$ et $x\in[1{,}6;1{,}7]$ alors $\begin{cases}1{,}6\leq\alpha\leq1{,}7\\-1{,}7\leq -x\leq -1{,}6\end{cases}$ d'où $-0.1\leq\alpha-x\leq 0{,}1$ d'où $|\alpha-x|\leq10^{-1}$.

2. Continuité de la composée de deux fonctions

Soient u et v des fonctions numériques, a un réel et I un intervalle.

a. Théorèmes admis

- Si u est continue en a et v continue en $\mathrm{u}(a)$ alors $\mathrm{v}\circ\mathrm{u}$ est continue en a.
- Si u est continue sur I et v est continue sur un intervalle J tel que $u(x)\,\epsilon\,J$ pour tout x appartenant à I alors $\mathrm{v}\circ\mathrm{u}$ est continue sur I.

b. Corollaire

- Si u est continue sur I alors la fonction f définie par $f(x)=|\mathrm{u}(\mathrm{x})|$ est continue sur I.
- Si u est continue sur I et $\mathrm{u}(\mathrm{x})\geq 0$ pour tout x appartenant à I alors la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{\mathrm{u}(\mathrm{x})}$ est continue sur I.

3. Théorèmes généraux sur la continuité

Soient u et v des fonctions et I un intervalle.

- Si u et v sont continues sur I alors les fonctions f, g et h définies par $f(x)=\mathrm{u}(\mathrm{x})+\mathrm{v}(\mathrm{x})$; $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\mathrm{u}(\mathrm{x})-\mathrm{v}(\mathrm{x})$ et $h(x)=\mathrm{u}(\mathrm{x})\times\mathrm{v}(\mathrm{x})$ sont continues sur I.
- Si u et v sont continues sur I et pour tout x appartenant à I, $\mathrm{v}(\mathrm{x})\neq 0$ alors la fonction f définie par $f(x)=\frac{\mathrm{u}(\mathrm{x})}{\mathrm{v}(\mathrm{x})}$ est continue sur I.

III. Rappels et compléments sur la dérivation

1. Théorème

- Si $f'_d(a) > 0$ (respectivement si $f'_g(a) > 0$) alors la demi-tangente à droite (respectivement à gauche) à C_f au point d'abscisse a est une demi-droite oblique orientée vers le haut (respectivement vers le bas).
- Si $f'_d(a) < 0$ (respectivement si $f'_g(a) < 0$) alors la demi-tangente à droite (respectivement à gauche) à C_f au point d'abscisse a est une demi-droite oblique orientée vers le bas (respectivement vers le haut).
- Si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$ alors f n'est pas dérivable en a et graphiquement, C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse a.
- Si $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$ (respectivement si $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$) alors f n'est pas dérivable à droite (respectivement à gauche) en a et graphiquement, C_f admet une demi-tangente verticale à droite (respectivement à gauche) au point d'abscisse a. De plus si $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$(respectivement si $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$) alors la demi-tangente verticale est orientée vers le haut (respectivement vers le bas) et si $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$(respectivement si $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$) alors la demi-tangente verticale est orientée vers le bas (respectivement vers le haut).

Exemple

$f(x) = \sqrt{x}$. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

Solution

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et C_f admet une demi-tangente verticale à droite au point d'abscisse 0.

Remarque

Si C_f admet une demi-tangente verticale à gauche et à droite au point d'abscisse a alors C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse a.

2. Dérivabilité de la composée de deux fonctions

a. Théorèmes admis

Soient u et v des fonctions, a un réel et I un intervalle.

- Si u est dérivable en a et v est dérivable en u(a) alors $v \circ u$ est dérivable en a.

- Si u est dérivable sur un intervalle I, v est dérivable sur un intervalle J et pour tout x appartenant à I, u(x) appartient à J alors $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout x appartenant à I, on a : $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$.

b. Dérivées de fonctions trigonométriques

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	f est dérivable sur	Fonction f' :
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[; k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = 1 + tan^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$
$f(x) = \cos(u(x))$	I	$f'(x) = -\mathrm{u}'(\mathrm{x}) \sin((ux))$
$f(x) = \sin(u(x))$	I	$f'(x) = u'(x) \cos(u(x)$
$f(x) = \tan(u(x))$	I si pour tout $x \in I, u(x) \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[; k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = u'(x)\left(1 + tan^2(u(x))\right) = \frac{u'(x)}{cos^2(u(x))}$

Exemples

Dans chacun des cas suivants, donner un intervalle sur lequel f est dérivable puis calculer $f'(x)$:$f(x) = cos(3x + 1); f(x) = sin\,(2x + 3); f(x) = tan\,(x - \frac{\pi}{4})$.

Solution

- Pour $f(x) = cos(3x + 1)$; Posons $u(x) = 3x + 1$; u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -u'(x)\sin(u(x)) = -3\sin(3x + 1)$.
- $f(x) = sin\,(2x + 3)$; Posons $u(x) = 2x + 3$; u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = u'(x)\cos(u(x)) = 2\cos(2x + 3)$.
- Pour $f(x) = tan\,(x - \frac{\pi}{4})$; Posons $u(x) = x - \frac{\pi}{4}$; u est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[; k \in \mathbb{Z}$

  $u(x) \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + k\pi$

  $\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$

  $\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right[$

u est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi\,;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right[$ et $u(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}+k\pi\,;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right[$ donc f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$ et $f'(x) = u'(x)\left(1+\tan^2\big(u(x)\big)\right) = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} = 1+\tan^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2(x-\frac{\pi}{4})}$.

3. Théorèmes généraux sur la dérivabilité

- Si u et v sont dérivables sur I alors les fonctions $u+v$ et $u.v$ sont dérivables sur I et on a : $(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x)$ et $(uv)'(x) = u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$ pour tout x dans I.
- Si u et v sont dérivables sur I et si $v(x) \neq 0$ pour tout x dans I alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v(x)^2}$ pour tout x dans I.

4. Applications de la dérivation

a. Théorème admis

Si a est un réel et $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = l$ avec l un réel ou $l = \infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$.

Ce théorème permet de lever la forme indéterminée d'une limite de la forme $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ où a est un réel.

Exercice d'application

Calculer $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}-\sqrt{x-3}}{x^2-9}$

Solution

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x}-\sqrt{3}-\sqrt{x-3} = 0\\ \lim\limits_{x\to 3^+} x^2-9 = 0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}-\sqrt{x-3}}{x^2-9} \text{ donne une forme indéterminée}$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}-\sqrt{x-3}}{x^2-9} = \left(\frac{1}{x+3}\right)\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}-\sqrt{x-3}}{x-3}$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}-\sqrt{x-3}}{x-3} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-3}-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \text{ où } f(x) = \sqrt{x}-\sqrt{x-3}$$

$$\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}-\sqrt{x-3}}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\,;\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f'(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = -\infty$ par suite $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{x+3}\right)\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}-\sqrt{x-3}}{x-3} = -\infty$.

b. Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soient a et b des nombres réels et I un intervalle. Si f est continue et strictement monotone sur I alors le tableau suivant donne f(I) en fonction de la monotonie de f sur I.

I	f(I)	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a;+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);f(a)\right]$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty;a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;a[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

c. Dérivée et bijection

Soit I un intervalle.

- **Théorème 1**

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle f(I).

- **Corollaire**

Si f est continue et strictement monotone sur I et si 0 appartient à f(I) alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I. En particulier si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[a;b]$.

- **Théorème-définition**

Si f est une bijection de I sur J alors on peut définir une fonction notée f^{-1}: J→I telle que x↦ $f^{-1}(x) = y$ avec f(x)=y. f^{-1} est une bijection et est dite bijection réciproque de f.

- **Théorème 2**

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f^{-1} est continue et strictement monotone sur f(I). De plus le sens de variation de f^{-1} sur f(I) est celui de f sur I.

- **Théorème 3**

Soit f une bijection de I sur J ; $f^{-1}: J \to I$ sa bijection réciproque ; $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$: $y_0 = f(x_0)$

- Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et on a :
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$
- Si f n'est pas dérivable en x_0 et $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = 0$.
- Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0.
- Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors f^{-1} est dérivable sur J et pour tout $x \in J$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

- **Exercice d'application**

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

1. Dresser le tableau de variation de f puis montrer que f réalise une bijection de $]-\infty; 3[$ sur un intervalle J à déterminer.
2. Donner l'ensemble de définition de f^{-1} puis y préciser ses variations.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{3}$ et calculer $(f^{-1})'(\frac{1}{3})$.
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J puis calculer $(f^{-1})'(x)$.

d. Inégalité des accroissements finis

- **Théorème de l'inégalité des accroissements finis**

Si f est dérivable sur un intervalle I et s'il existe des réels constants m et M tels que pour tout $x \in I$, $m \leq f'(x) \leq M$ alors pour tous a et $b \in I$ avec $a \leq b$ on a : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Exemple

$f(x) = \sqrt{1+x}$

1. Montrer que f est dérivable sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ puis calculer $f'(x)$
2. Montrer que si $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ alors $\frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$
3. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, montrer que Si $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ alors $\frac{1}{\sqrt{6}}x \leq f(x) - f(0) \leq \frac{1}{2}x$
4. En déduire que si $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$alors $\frac{1}{\sqrt{6}}x + 1 \leq \sqrt{1+x} \leq \frac{1}{2}x + 1$

- **Théorème de l'inégalité des accroissements finis avec valeur absolue**

Si f est dérivable sur un intervalle I et s'il existe M> 0 tel que pour tout x ∈ I, $|f'(x)| \leq M$ alors pour tous a et b ∈ I, on a :$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

Exemple (Exemple qui sera traité en exo)

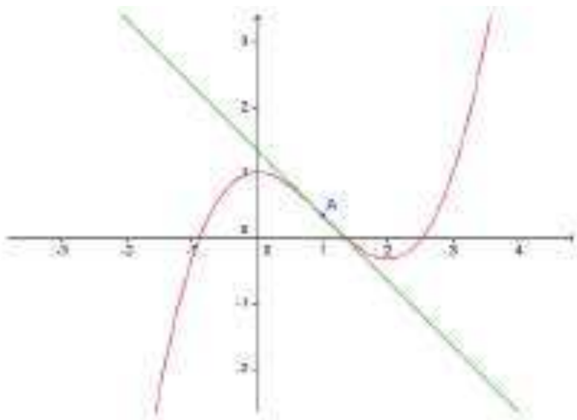
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{|x^2-4|} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Ecrire f(x) sans les symboles de la valeur absolue.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$
3. Montrer que si $x \in \left[1\,; \frac{3}{2}\right]$ alors $|f'(x)| \leq \frac{3\sqrt{7}}{7}$. En déduire que si $x \in \left[1\,; \frac{3}{2}\right]$ alors $|f(x) - \alpha| \leq \frac{3\sqrt{7}}{7}|x - \alpha|$

5. Points d'inflexion

a. Définition

On dit la courbe C_f d'une fonction f admet un point d'inflexion A si C_f traverse sa tangente en A.



b. Théorème

Si f et f' sont dérivables sur un intervalle ouvert I contenant a et si f'' s'annule en a en changeant de signe alors le point A(a, f(a)) est un point d'inflexion de C_f.

c. Exemple

$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$ et C_f sa courbe dans un orthonormé (O, I, J).

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Montrer que C_f admet deux points d'inflexion.

FIN

CHAPITRE 2 : PRIMITIVES D'UNE FONCTION

Durée : 6h (Cours+td)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer les primitives des fonctions usuelles ;
- ✓ Déterminer les primitives des fonctions usuelles ;
- ✓ Déterminer les primitives des fonctions du type $(g' \circ f) \times f'$ et $f' \times f^n$;$n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

Prérequis :

- ✓ Continuité d'une fonction ;
- ✓ dérivée d'une fonction.

Supports didactiques :

- ✓ Nouveau Transmath (Term S);
- ✓ Visa Bac ;
- ✓ CIAM Terminal SE ;
- ✓ CIAM TSM ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

Introduction

I. Notion de primitive

1. **Définition et exemples**
2. **Théorème 1 (admis)**
3. **Théorème 2**
4. **Théorème 3**
5. **Corolaire**
6. **Théorème 4**
   - ➢ **Exemple**

II. Calculs de primitives

1. **Primitives des fonctions usuelles**
   - ➢ **Exemples**
2. **Opérations sur les primitives**
   - ➢ **Exemples**

Déroulement du cours

Introduction

Soit f est une fonction définie sur un intervalle I. On peut se demander si on peut trouver une fonction F dérivable telle que $F'(x) = f(x)$. Si oui, une telle fonction est-elle unique?

Pour certaines fonctions f donnée, l'objectif de ce chapitre est de donner une condition qui garantit l'existence d'une telle fonction F, de voir dans ce cas qu'elle n'est pas unique et de donner des formules pour les déterminer toutes.

I. Notion de primitive

1. Définition et exemples

a. Définition

Soient f et F des fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

b. Exemples

- La fonction F définie par $F(x) = 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie f(x)=2 car F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = 2 = f(x)$.
- La fonction F définie par $F(x) = x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 2x$ car F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = 2x = f(x)$.

2. Théorème 1 (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

3. Théorème 2

Si f est continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et c un réel constant alors la fonction G telle que $G(x) = F(x) + c$ est une primitive de f sur I. Par conséquent toute fonction continue sur un intervalle admet une infinité de primitives sur intervalle.

Preuve

G(x)=F(x)+c. Comme F est dérivable sur I donc G est dérivable sur I et on a $G'(x) = F'(x) = f(x)$ d'où G est une primitive de f sur I. Comme il y a une infinité de réels constants c donc il y a une infinité de fonction G telles que G(x)=F(x)+c par suite f admet une infinité de primitives sur I.

4. Théorème 3

Si F une primitive de f sur un intervalle I et G une autre primitive de f sur I alors il existe un réel constant c tel que G(x)=F(x)+c.

Preuve

Soit F une primitive de f sur I et G une autre primitive de f sur I. posons $H(x) = G(x) - F(x)$. H est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc la fonction H est constante sur I par suite, il existe un réel constant c tel que $H(x) = c$ d'où $G(x) - F(x) = c$ donc $G(x) = F(x) + c$.

5. Corollaire

D'après les théorèmes 2 et 3, on peut dire que si on connait une primitive F sur I d'une fonction f alors on connait toutes les autres primitives de f sur I : ce sont les fonctions G telles que $G(x) = F(x) + c$ où c est un réel constant.

6. Théorème 4

Si f est une fonction continue sur I, $x_0 \in$ I et $y_0 \in \mathbb{R}$ alors il existe une seule primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0 c'est-à-dire qui vérifie $f(x_0) = y_0$.

Exemple

Soit f la fonction définie par f(x)=2x. Déterminer la primitive sur de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -2 en 1.

La fonction F définie par $F(x) = x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Soit G la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -2 en 1, c'est-à-dire $G(1) = -2$.

Comme G est une primitive de f alors $G(x) = x^2 + c$ où c est un réel. Ainsi $G(1) = 1 + c$. Et comme $G(1) = -2$ alors $1 + c = -2$ d'où $c = -3$. Par suite la fonction G définie $G(x) = x^2 - 3$ est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -2 en 1.

II. Calculs de primitives

1. Primitives des fonctions usuelles

Le tableau suivant donne des primitives des fonctions usuelles. Il est obtenu à partir de la connaissance des fonctions dérivées des fonctions usuelles.

Fonction f définie par :	Une primitive F de f	Sur l'intervalle
$f(x) = 0$	$F(x) = c$ où c est un réel	$\mathbb{R}$
$f(x) = c$ où c est un réel constant	$F(x) = cx$	$\mathbb{R}$

$f(x) = 2x$	$F(x) = x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = -\frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \text{cotan}^2 x$	$F(x) = -cotan\, x$	$]k\pi \,;\, \pi + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$	$F(x) = \tan(ax+b)$	I si $ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in I$.

- **Exemples**

- Si $f(x) = x^6$ alors F définie par $F(x) = \frac{1}{7}x^7$ est une primitive de f sur
- Si $f(x) = \frac{1}{x^4}$ alors F définie par $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ est une primitive de f sur $]-\infty, 0[$
- Si $f(x) = \cos(3x+1)$ alors F définie par $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x+1)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Opérations sur les primitives

a. Primitive de la somme de deux fonctions

Si u(x) et v(x) sont des expressions de fonctions admettant sur un intervalle I, des primitives définies respectivement par U(x) et V(x) alors la fonction définie par U(x)+V(x) est une primitive sur I de la fonction définie par u(x)+v(x).

Exemple

Déterminons sur $\mathbb{R}$, une primitive de f définie par $f(x) = x^2 + 2x$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction F définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Primitive du produit d'une fonction par un nombre réel constant

Si u(x) est l'expression d'une fonction admettant sur un intervalle I une primitive définie par U(x) et k un réel constant alors la fonction définie par $k \times U(x)$ est une primitive sur I de la fonction définie par $k \times u(x)$.

Exemple

Déterminons sur $\mathbb{R}$, une primitive de f définie par $f(x) = 2(x^2 + 2x)$

La fonction F définie par $F(x) = 2(\frac{1}{3}x^3 + x^2)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

c. Primitive de $u' \times (v' \circ u)$

Si u est dérivable sur un intervalle I et si v est dérivable sur un intervalle J tel que pour tout x appartenant à I, $u(x) \in J$ alors la fonction définie par $v[u(x)]$ est une primitive sur I de la fonction définie par $u'(x) \times v'[u(x)]$.

d. Conséquences

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, à partir du résultat ci-dessus, on déduit le tableau suivant.

Fonction f définie par	Une primitive de f	Sur l'intervalle
$u'(x)[u(x)]^n$, $n \in \mathbb{Q}_+$	$\frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1}$	I
$\frac{u'(x)}{[u(x)]^n}$, $n \in \mathbb{Q}_+ \setminus \{1\}$	$-\frac{1}{(n-1)[u(x)]^{n-1}}$	I si $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in$ I
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$	I si $u(x) > 0$ pour tout $x \in$ I
$u'(x)\cos[u(x)]$	$\sin[u(x)]$	I
$u'(x)\sin[u(x)]$	$-\cos[u(x)]$	I
$\frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$	$\tan[u(x)]$	I si $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in$ I

Exemples

Déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de f dans chacun des cas suivants :

i. $f(x) = 2(2x - 4)^2$

ii. $f(x) = \frac{2x-4}{(x^2-4x)^3}$

iii. $f(x) = x^2 \sin(x^3)$

CHAPITRE 3 : Forme algébrique des nombres complexes

Durée : 7h (Cours)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer la forme algébrique d'un nombre complexe et sa notation ;
- ✓ Restituer et utiliser les propriétés du conjugué d'un nombre complexe ;
- ✓ Restituer et utiliser les propriétés du module d'un nombre complexe ;
- ✓ Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations du 2nd degré à coefficients complexes.

Prérequis :

- ✓ Calcul dans $\mathbb{R}$;
- ✓ Equation du 2nd degré dans $\mathbb{R}$.

Supports didactiques :

- ✓ Nouveau Transmath (Term S);
- ✓ Visa Bac ;
- ✓ CIAM Terminale SE ;
- ✓ CIAM TSM ;
- ✓ Mathématiques terminales A1B ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

Introduction

I. Ensemble des nombres complexes

Déroulement du cours

Introduction (orale)

Dès son apparition sur terre, l’homme a senti la nécessité de compter : sa fortune, ses enfants, bref ses biens, c’est ainsi que des nombres sont apparus naturellement et sont dits nombres entiers naturels. L’ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{N}$. C’est pourquoi, un célèbre scientifique disait que les entiers naturels ont été créés par Dieu tandis que les autres nombres sont l’œuvre de l’homme. Après les nombres entiers naturels, il y a respectivement la venue des nombres entiers relatifs ($\mathbb{Z}$), des nombres rationnels ($\mathbb{Q}$) nécessaires pour le partage, des nombres réels ($\mathbb{R}$) (comme $\sqrt{2}$ par exemple, nécessaire pour mesurer la diagonale d’un carré de côté 1).

Depuis toujours, on sait qu’il n’existe pas de nombre réel dont le carré est négatif. Cependant, au 16ème siècle, dans la résolution des équations de degré 3, des mathématiciens notamment les italiens Cardan (Jérôme) et Bombelli (Raphaël) ont osé introduire des expressions qui ne sont pas des nombres réels car comportant des racines carrées de nombres réels négatifs. De telles expressions étaient désignées « quantités imaginaires». Ces dernières, bien que controversées pendant deux siècles s’avéraient utiles car elles avaient permis de résoudre algébriquement des équations de degré 3 qui étaient jusque-là une énigme pour les mathématiciens.

Au 18ème siècle, D’Alembert (Jean le Rond : Français) montre que tous les imaginaires inventés sont de la forme a+$\sqrt{-1}$ b et Euler (Leonhard : Suisse) en 1777 adopte le symbole i pour désigner $\sqrt{-1}$ et écrit $i^2 = -1$.

Dans la réalité, les choses ne furent pas aussi simples. Au contraire, les évolutions furent lentes, les avancées craintives et hésitantes mais à la fin du 18ème siècle, les nombres a+ib sont d’un usage courant.

Dans la vie courante, ils ont aujourd'hui plusieurs applications surtout en aérodynamique, en mécanique des fluides, en théorie quantique, en électrotechnique……

I. Ensemble des nombres complexes

1. Historique des nombres complexes

Au 16ème siècle, Cardan et Bombelli ont introduit des expressions comportant des racines carrées de nombres réels négatifs pour résoudre des équations de degré 3 qui étaient jusque-là un mystère pour les mathématiciens. Plus tard en 1777, Euler adopte le symbole i pour désigner $\sqrt{-1}$ et écrit $i^2 = -1$, puis introduit naturellement ib, produit de i par un nombre réel b et ensuite les nombres a+ib, somme du nombre réel a et du nombre ib. L'ensemble de tous les nombres a+ib, avec a et b des nombres réels est appelé ensemble des nombres complexes et est noté $\mathbb{C}$. Il contient l'ensemble des nombre réels $\mathbb{R}$. Enfin, ils ont additionné, soustrait, multiplié, divisé ces nombres a+ib comme s'il s'agissait de nombres réels en remplaçant i^2par -1 lorsque le cas se présente. Ils ont constaté que les résultats des calculs sont toujours des nombres qui s'écrivent sous la forme a+ib et que la commutativité, la distributivité de la multiplication par à l'addition et l'associativité restent de mise avec ces nouveaux nombres. Ainsi a+ib=a+bi.

2. Définitions et exemples

a. Définitions et notations

- Un nombre complexe est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $a + b\,i$ où a, b sont des nombres réels et $i^2 = -1$. Il est souvent noté z.
- L'écriture $z = a + bi$ avec a et b des nombres réels est dite la forme algébrique du nombre complexe z.
  - ➢ Le réel a est dit partie réelle de z et est notée Re(z).
  - ➢ Le réel b est dit partie imaginaire de z et est notée Im(z).

b. Exemples

- $z = 1 + 2i$ est un nombre complexe tel que : Re(z)= 1 et Im(z)= 2
- $z = -3$ est un nombre complexe car $z = -3 + 0.i$ tel que : Re(z)= -3 et Im(z)= 0. Plus généralement tout nombre réel est un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle. On écrit $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- $z = 5i$ est un nombre complexe car $z = 0 + 5i$ tel que : Re(z)= 0 et Im(z)= 5. Plus généralement tout nombre complexe dont la partie réelle est nulle est de la forme bi= avec b un réel et est appelé imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $\mathbb{R}i$.

3. Opérations sur les nombres complexes

Exemple de calcul

$z = 4 + 3i$ et $z' = 3 + 2i$

- $z + z' = (4 + 3i) + (3 + 2i) = 7 + 5i$
- $z - z' = (4 + 3i) - (3 + 2i) = 1 + i$
- $zz' = (4 + 3i)(3 + 2i) = 6 + 17i$
- $z^2 = (4 + 3i)^2 = 7 + 24i$
- $\frac{z}{2i} = \frac{4+3i}{2i} = -\frac{3}{2} + 2i$

4. **Propriétés :** Soient $z, z' \in \mathbb{C}$

- $z = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) = 0$.
- $z = z' \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$.
- $z \in \mathbb{R}i \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$.

5. **Remarque**

Un nombre complexe qui n'est pas un nombre réel n'a pas de signe et on ne peut pas dire qu'il est plus grand ou plus petit qu'un autre nombre complexe donné.

II. Représentation géométrique d'un nombre complexe

1. Images d'un nombre complexe

a. Définitions

Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$ et $(O; \vec{u}; \vec{v})$, un repère orthonormé direct du plan.

Dans ce repère :

- $M\binom{a}{b}$ est appelé point image de $z = a + bi$ et est noté $M(z)$. Réciproquement, on dit que $z = a + bi$ est l'affixe du point $M\binom{a}{b}$ et est noté z_M.
- Le vecteur $\vec{W}\binom{a}{b}$ ($c'est$ à $dire$ $\vec{W} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$) est appelé vecteur image du nombre complexe $z = a + bi$ et est noté $\vec{W}(z)$. Réciproquement, on dit que $z = a + bi$ est l'affixe du vecteur $\vec{W}\binom{a}{b}$ et est noté $z_{\vec{W}}$.

Schéma

Le plan muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ dans le quel on peut représenter chaque nombre complexe par son point image est appelé plan complexe.

Dans tout le reste du chapitre, on considère le plan complexe et l'écriture $z = a + bi$ désigne la forme algébrique de z.

b. Exemples : Dans $(O; \vec{u}; \vec{v})$:

- Le point image et le vecteur image du nombre complexe $1 + 2i$ sont respectivement le point $M\binom{1}{2}$ et le vecteur $\vec{W}\binom{1}{2}$.
- L'affixe du point $M\binom{-1}{3}$ est le nombre complexe noté $z_M = -1 + 3i$
- L'affixe du vecteur $\vec{W}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est le nombre complexe noté $z_{\vec{W}} = -\frac{1}{2}i$.

2. Propriétés :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow M(z)$ appartient à l'axe $(O, \vec{u})$. Ainsi l'axe $(O, \vec{u})$ est dit axe réel.
- $z \in \mathbb{R}i \Leftrightarrow M(z)$ appartient à l'axe $(O, \vec{v})$.. Ainsi l'axe $(O, \vec{v})$ est dit axe des imaginaires purs.
- Si $G = \text{bary}\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$ alors $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$.
- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$. En particulier $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M$.
- $z_{\vec{U}+\vec{V}} = z_{\vec{U}} + z_{\vec{V}}$ et $z_{\alpha\vec{U}} = \alpha z_{\vec{U}}$.
- $z_{\vec{U}} = z_{\vec{V}} \Leftrightarrow \vec{U} = \vec{V}$.
- $z = -z' \Leftrightarrow M(z)$ et M'(z') sont symétriques par rapport à O.

3. Exercice d'application :

A, B, C, D et G sont tels que : $z_A = 1 + 2i$; $Z_B = 1 - 2i$; $z_C = 3 + i$; $z_D = 4i$ et $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, -1); (C, 2)\}$

1. Calculer z_G
2. Calculer $z_{\overrightarrow{AB}}$ et $z_{\overrightarrow{DO}}$. En déduire la nature du quadrilatère ABOD.

III. Conjugué et module d'un nombre complexe

1. Conjugué d'un nombre complexe

a. Définition

Le conjugué du nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe noté $\bar{z}$ défini par $\bar{z} = a - bi$.

b. Exemples

- Si $z = 3 + 2i$ alors $\bar{z} = 3 - 2i$.
- Si $z = -4 - 3i$ alors $\bar{z} = -4 + 3i$.

- Si $z = 2$ alors $\bar{z} = 2$.
- Si $z = 2i$ alors $\bar{z} = -2i$

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a les propriétés suivantes :

c. Propriétés 1 :

- $\bar{\bar{z}} = z$. En d'autre termes, z est le conjugué de $\bar{z}$.
- $z + \bar{z} = 2\,R_e(z)$ et $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)i$.
- Si $z = a + ib$ alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$. Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z}$ est un réel positif
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$
- $z \in \mathbb{R}i \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

d. Propriétés 2

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z - z'} = \bar{z} - \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$

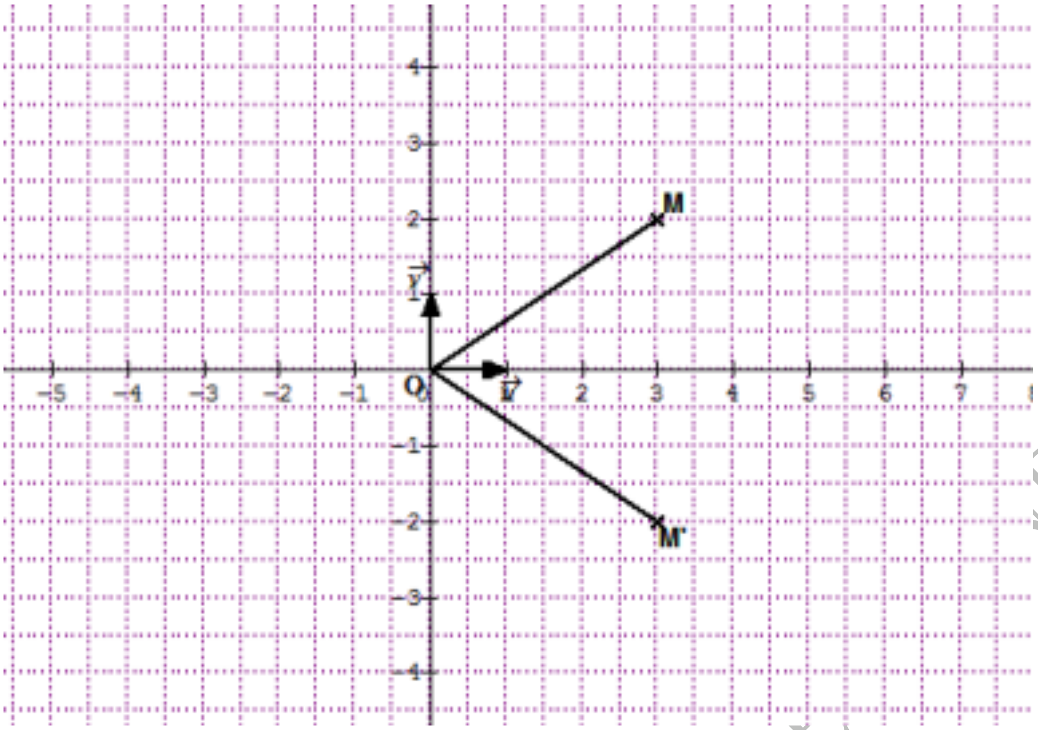
Exercice d'application

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 2i$. On pose $Z = \frac{z+1}{z-2i}$. Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que :

1. Z soit un réel.
2. Z soit un imaginaire pur.

e. Interprétation géométrique

Le conjugué de $z = 3 + 2i$ est $\bar{z} = 3 - 2i$. Dans le plan complexe, représentons M(z) et $M'(\bar{z})$ on a alors :



On constate que $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Plus généralement :

- $M(z)$ et $M'(z')$ sont symétriques par rapport à l'axe réel si et seulement si $z = \overline{z'}$ (ou bien $\bar{z} = z'$).
- $M(z)$ et $M'(z')$ sont symétriques par rapport à l'axe des imaginaires purs si et seulement si $-z = \overline{z'}$ (ou bien $\bar{z} = -z'$).

Exercice d'application

1. $z = \frac{4-5i}{3+i}$. Donner la forme algébrique de $\bar{z}$.

2. $z = \frac{1+2i}{-3+4i}$ et $z' = \frac{1-2i}{3+4i}$. Exprimer $\bar{z}$ en fonction de z'. Que peut-on dire de M(z) et de M'(z') ?

2. Module d'un nombre complexe

a. Définition :

Le module d'un nombre complexe z est le réel positif noté $|z|$ défini par : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Autrement dit, si $z = a + bi$ alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b. Exemples

- Si $z = -3 + 4i$ alors $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

- Si $z = -3$ alors $|z| = \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$. Donc le module d'un nombre réel correspond à sa valeur absolue de ce nombre réel.

c. **Propriétés 1 :** z, z' ∈ ℂ, on a les propriétés suivantes :

- $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}}$

Exercice d'application

Soit z, z', z'' des nombres complexes de module 1 tels que $z + z' + z'' = 1$.

Calculer $\frac{1}{z} + \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}$.

d. **Propriétés 2**

- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. **Cette propriété est appelée inégalité triangulaire.**
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$.
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $(z' \neq 0)$

Exercice d'application

Calculer les modules des nombres complexes suivants :$(1+i)^{10}$; $(4+2\sqrt{5}i)(1-i)^5$ et $\frac{(-\sqrt{3}+i)^4}{(1+i)^6}$.

e. **Interprétation géométrique du module :**

- Si M est le point image de z dans le plan complexe alors $|z| = OM$.
- Si $\vec{u}$ est le vecteur image de z dans le plan complexe alors $|z| = \|\vec{u}\|$.
- $|z_B - z_A| = AB$.
- $\left|\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right| = \frac{AB}{CD}$

Preuve

Soit $z = a + bi$ donc $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- $O\binom{0}{0}$ et $M(z) = M\binom{a}{b}$ donc $OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ d'où $|z| = OM$.
- $\vec{u}(z) = \vec{u}\binom{a}{b}$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ d'où $|z| = \|\vec{u}\|$.

- $|z_B - z_A| = |z_{\overrightarrow{AB}}| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$
- $\left|\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_D - z_C|} = \frac{AB}{CD}$

Exercice d'application

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 3 - 2i$. On pose $Z = \frac{z-3i}{z-3+2i}$; soit $M(z)$; $A(3i)$ et $B(3-2i)$.

1. Interpréter géométriquement le module de Z.
2. En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|Z| = 1$.

IV. Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

1. Racines carrées d'un nombre complexe

a. Définition : $\delta, z \in \mathbb{C}$

On dit que δ est une racine carrée de z dans $\mathbb{C}$ si $\delta^2 = z$.

b. Exemple

$2 + 3i$ est une racine carrée de $-5 + 12i$ car $(2+3i)^2 = -5 + 12i$.

c. Remarque

Tout nombre complexe non nul admet dans $\mathbb{C}$ deux racines carrées et ces deux racines carrées sont opposées.

d. Propriété

Si $z = a + bi$ alors les racines carrées de z dans $\mathbb{C}$ sont les nombres complexes $\delta = x + yi$ tels que $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$

Preuve

Soit $z = a + ib$.

$\delta = x + iy$ est une racine carrée de $z \Leftrightarrow \delta^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} (x+yi)^2 = a + bi \\ |\delta^2| = |z| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \\ |\delta|^2 = |z| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

e. Exemple

Déterminons les racines carrées de -5+12i

f. Remarque

- Si z est réel strictement positif alors les racines carrées de z dans $\mathbb{C}$ sont les nombres complexes $\delta_1 = \sqrt{z}$ et $\delta_2 = -\sqrt{z}$ où $\sqrt{z}$ est la racine carrée de z dans $\mathbb{R}$.
- Si z est un réel strictement négatif alors les racines carrées de z dans $\mathbb{C}$ sont les nombres complexes $\delta_1 = \sqrt{-z}\, i$ et $\delta_2 = -\sqrt{-z}\, i$.

2. Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

a. Définitions

- Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ de la variable z est une équation qui peut s'écrire sous la forme $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont dans $\mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.
- Le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

b. Méthode

Soit l'équation (E): $az^2 + bz + c = 0$.

- Si $\Delta = 0$ alors (E) a deux solutions identiques dite solution double notée $z_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta \neq 0$ alors (E) a deux solutions distinctes : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est l'une des deux racines carrées de Δ.

c. Exemple

Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$

d. Remarque

Toute équation du second degré admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions qui peuvent distinctes ou identiques.

Chapitre : ANGLES ORIENTES ET LA TRIGONOMETRIE

Durée : 7h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer la définition du radian ;
- ✓ Calculer la longueur d'un arc de cercle ;
- ✓ Convertir les degrés en radians et inversement ;
- ✓ Reconnaitre sur un dessin codé un angle orienté de demi-droites ou de vecteurs ;
- ✓ Déterminer la mesure principale d'un angle orienté ;
- ✓ Construire un angle orienté connaissant sa mesure principale ;
- ✓ Restituer la relation de Chasles pour les angles orientés ;
- ✓ Restituer les relations liant les différentes mesures ;
- ✓ Restituer le vocabulaire : mesures d'un angle orienté et mesure principale d'un angle orienté ;
- ✓ Déterminer la mesure principale d'un angle orienté connaissant une de ses mesures.
- ✓ Restituer la définition du cercle trigonométrique ;
- ✓ Restituer et utiliser la relation fondamentale et les relations entre les lignes trigonométriques des angles opposés, des angles complémentaires et des angles supplémentaires ;
- ✓ Déterminer le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle orienté en utilisant les angles remarquables, les angles associés et la calculatrice ;
- ✓ Utiliser les configurations du cercle trigonométrique ;
- ✓ Etudier le signe du cosinus et du sinus d'un angle orienté connaissant sa mesure principale ;
- ✓ Restituer les formules et utiliser les formules d'addition, de duplication et de linéarisation
- ✓ Résoudre des équations du type cos x= cos a ; sin x=sin a et tan x =tan a et des équations se ramenant à ces formes.

Prérequis :

- ✓ Angles géométriques

Supports didactiques : ;

- ✓ C.I.A.M 1ère SM ; 1ère SE et 2nde S ;

- ✓ Collection Spirale 2^{nde} et $1^{ère}$ SE ;
- ✓ Collection perspectives 2^{nde} ;
- ✓ Document de Faye-Ka-Mbengue ;
- ✓ Livre XY MATHS de Papa Ousmane Thiao ;
- ✓ Collection Fractale 2^{nde}.

Plan de la leçon

I. Angle orienté

1. **Rappels sur les angles géométriques (ou angles non orientés)**
2. **Le radian**
   a. **Définition et notation**
   b. **Relation entre le degré et le radian**
   c. **Tableau donnant les mesures en degrés et en radians des angles remarquables**
3. **Angle orienté de deux vecteurs non nuls**
   a. **Définition, notation et représentation**
   b. **Remarque**
   c. **Mesure principale**
4. **Mesures d'un angle orienté**
   a. **Définition**
   b. **Remarque**
   c. **Détermination de la mesure principale d'un angle orienté connaissant une de ses mesures**

- ✓ **Exemples**
- ✓ **Exercice d'application**

5. **Propriétés sur les mesures des angles orientés**

II. Trigonométrie

1. **Orientation du plan**
2. **Cercle trigonométrique**
   a. **Définition**
   b. **Image d'un réel sur le cercle trigonométrique**
3. **Cosinus, sinus et tangente d'un réel**
   a. **Définitions**
   b. **Propriétés**

c. **Lignes trigonométriques particulières**

d. **Définition**

e. **Signe du cosinus et du sinus dans les quatre quadrants**

f. **Relations trigonométriques**

4. **Equations trigonométriques**
   - ✓ **Du type cos x= a**
   - ✓ **Du type sinx=a**
   - ✓ **Du type tan x= a**
5. **Conséquences**

Déroulement du cours

Introduction orale

Imaginons, une personne étrangère qui veut prier et qui par manque de repère se dirige vers le sud. Si tu veux qu'il se retourne pour faire face à l'Est alors quelle consigne vous allez lui donner ?

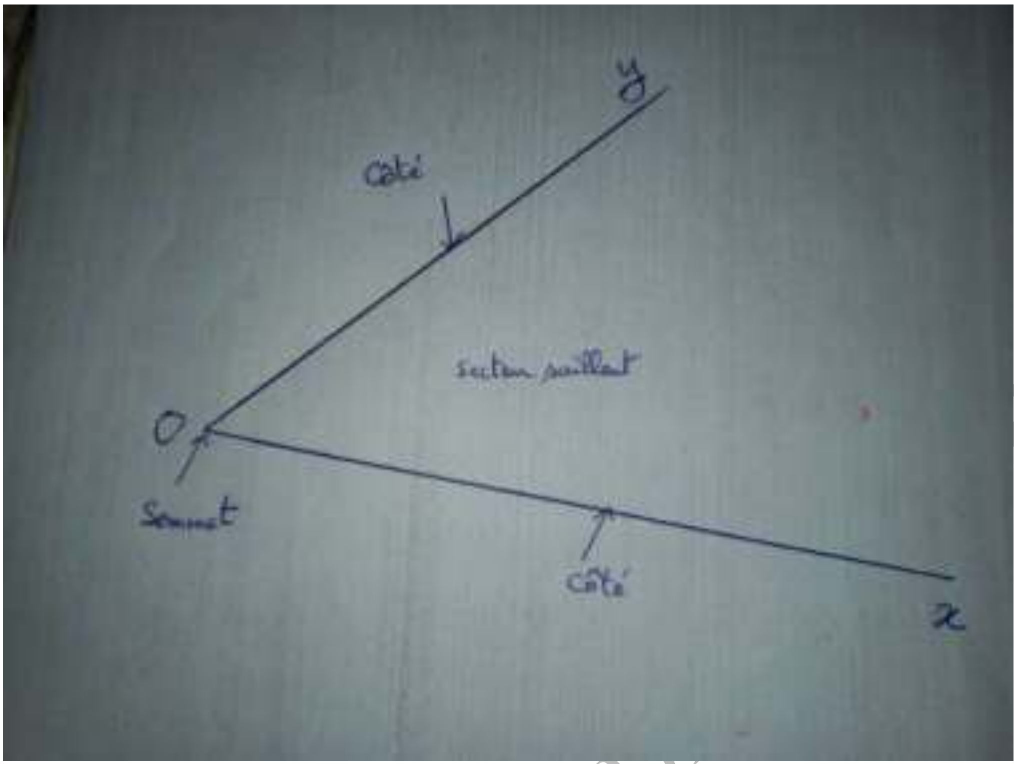
Naturellement, tu dois lui demander de tourner d'un angle de 90°. Mais si tu te limites à ça, l'étranger peut tourner de 90° vers la droite et dans ce cas, il fera face à l'Ouest au lieu de l'Est, donc il est nécessaire de lui indiquer qu'il doit tourner de 90° vers la gauche pour faire face à l'Est. Ainsi pour cet étranger, il ne s'agit pas seulement de tourner d'un angle de 90° mais il y a aussi un sens dans lequel il doit tourner. Ce problème met en évidence l'insuffisance des angles définis sans orientation de sens et permet de voir des angles avec un sens d'orientation bien défini. La notion d'angles orientés s'impose et permettra de compléter les carences des angles non orientés.

Chapitre : ANGLES ORIENTES ET LA TRIGONOMETRIE

I. Angle orienté

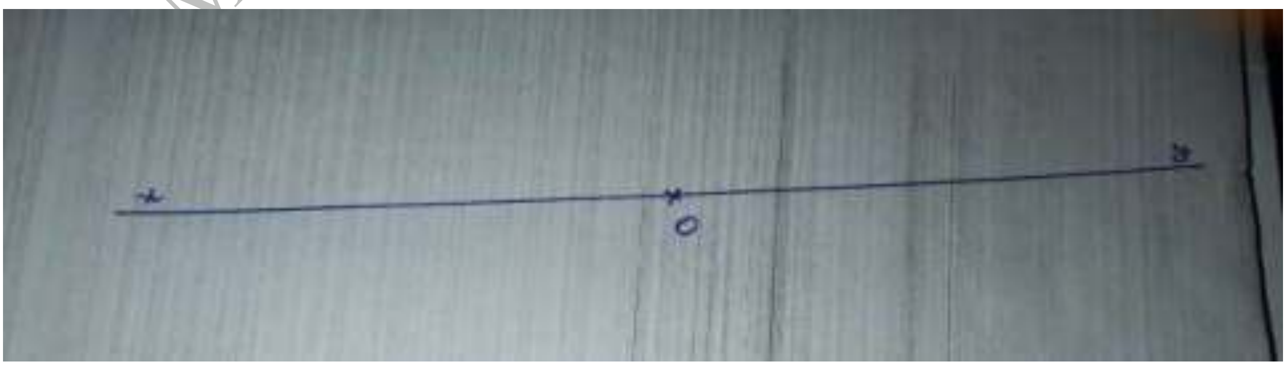
1. Rappels sur les angles géométriques (ou angles non orientés)

- Deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ de même origine O définissent un angle un angle noté $x\widehat{O}y$ (ou encore $y\widehat{O}x$) dit angle géométrique (dit aussi angle non orienté). O est le sommet de l'angle; $[Ox)$ et $[Oy)$ sont les côtés de l'angle.

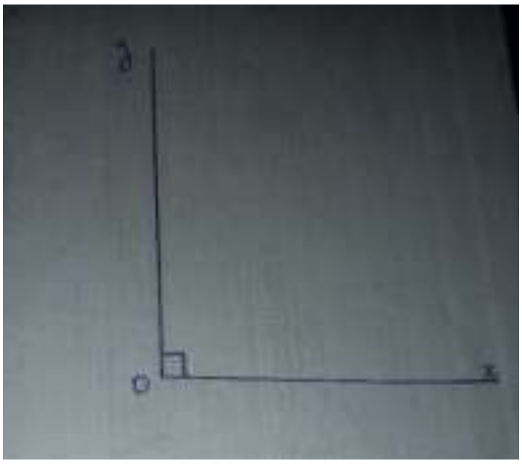


- Si [Ox) et [Oy) sont confondues alors l'angle $x\widehat{O}y$ est dit angle nul.

- Si les demi-droites [Ox) et [Oy) sont opposées alors l'angle $\widehat{xoy}$ est dit angle plat.



- Si les demi-droites [Ox) et [Oy) sont perpendiculaires alors l'angle $\widehat{xoy}$ est dit angle droit.



2. **Le radian**

a. **Définition et notation**

Le radian est une unité de mesures d'angles noté rad choisie de telle sorte qu'un angle plat mesure π rad.

b. **Relation entre le degré et le radian**

Si x est la mesure en degrés et y la mesure en radians d'un même angle géométrique alors on a : $\frac{x}{y} = \frac{180}{\pi}$.

c. **Tableau de conversion en radians des mesures en degrés des angles remarquables**

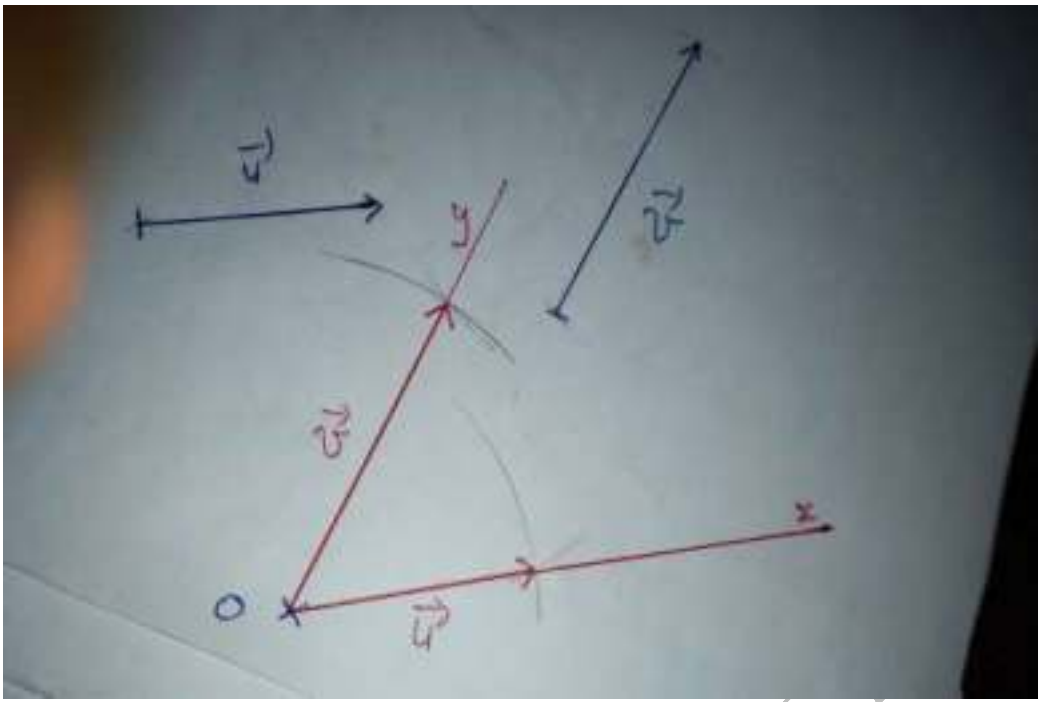
Les angles de mesures x degrés du tableau suivant sont dits angles remarquables. La relation $\frac{x}{y} = \frac{180}{\pi}$ a permis de convertir ces mesures x degrés en y radians. On a le tableau suivant :

x	0°	30°	45°	60°	90°	180°
y	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad

3. **Angle orienté de deux vecteurs non nuls**

a. **Définition, notation et représentation**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, $[Ox)$ et $[Oy)$, les demi-droites de même direction et de même sens que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement.



- Le couple de vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ est dit angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est noté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.
- Le couple de demi-droites ([Ox),[Oy)) de même origine O est un représentant de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.
- O est le sommet, [Ox) est le côté origine et [Oy) est le côté extrémité de ce représentant de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.
- Pour représenter l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ sur la figure, on dessine une flèche en forme d'arc dont l'origine indique coté origine [Ox) et l'extrémité, le coté extrémité [Oy).

NB : Dans tout le reste du chapitre, $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est un angle orienté de représentant ([Ox),[Oy)).

b. Remarque

- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est dit angle orienté nul.

- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est dit angle orienté plat.

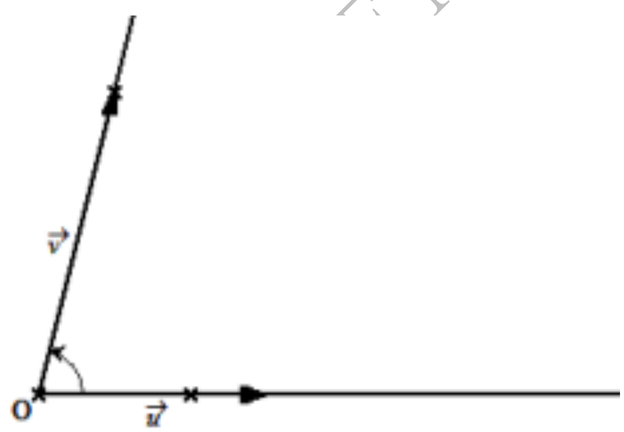
- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est dit angle orienté droit.

c. **Mesure principale**

i. **Orientation d'un angle orienté**

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté ni nul ni plat. Dans le secteur saillant défini par le couple ([Ox),[Oy)) :

- Si le sens de déplacement de [Ox) vers [Oy) s'effectue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (dit sens positif ou direct ou trigonométrique) alors $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est un angle orienté dans le sens direct.



$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est un angle orienté dans le sens direct.

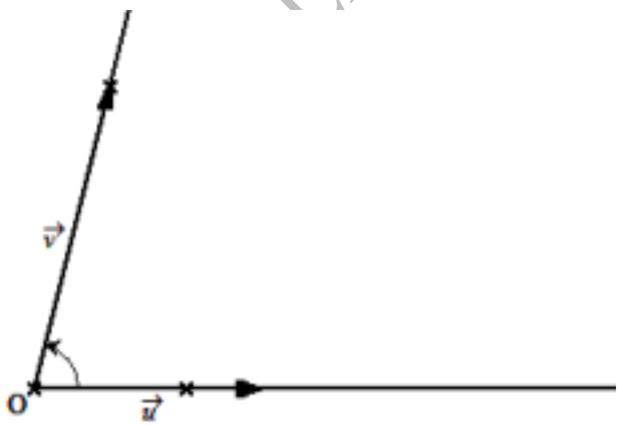
- Si le sens de déplacement de [Ox) vers [Oy) s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre (dit sens négatif ou indirect ou rétrograde) alors $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est un angle orienté dans le sens indirect.

$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est un angle orienté dans le sens indirect.

ii. Définition de la mesure principale

La mesure principale en radians de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est le réel que l'on peut noter θ défini par :

- Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est l'angle orienté nul alors $\theta = 0$.
- Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est l'angle orienté plat alors $\theta = \pi$.
- Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ n'est ni nul, ni plat et $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est orienté dans le sens direct alors $\theta = \widehat{xOy} =$ où $\widehat{xOy}$ est la mesure en radians de l'angle géométrique.



$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est un angle orienté dans le sens direct donc la mesure principale en radians est $\theta = \widehat{xOy}$ rad

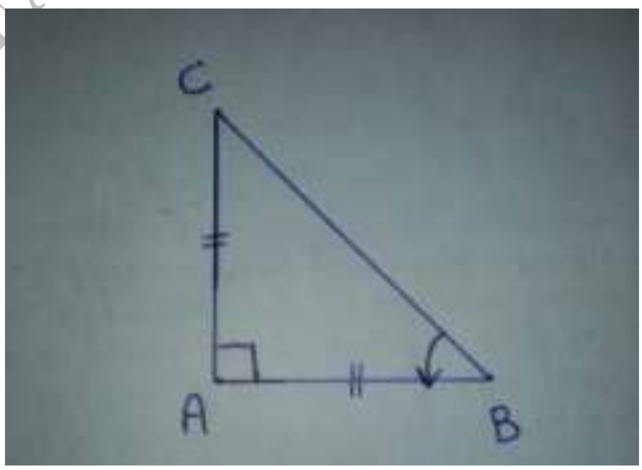
- Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ n'est ni nul, ni plat et $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est orienté dans le sens indirect alors $\theta = -\widehat{xOy}$ où $\widehat{xOy}$ est la mesure en radians de l'angle non orienté.

$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est un angle orienté dans le sens direct donc la mesure principale en radians est $\theta = -\widehat{xOy}$ rad

iii. Remarque

La mesure principale en radians d'un angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

iv. Exercice d'application



a. Quelle est la nature du triangle ABC ? Donner son orientation.

b. Représenter sur la figure l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}})$ puis donner sa mesure principale en radians.

c. Nommer l'angle orienté qui est représenté sur la figure puis donner sa mesure principale en radians.

4. Mesures d'un angle orienté

a. Définitions

- Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté et θ est sa mesure principale en radians. On appelle mesure en radians de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ tout nombre réel souvent noté $(\vec{u},\vec{v})$ ou mes$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et défini par $(\vec{u},\vec{v}) = \theta + 2k\pi$ où k est un entier relatif quelconque.
- Soient x et x' des réels. On dit que x est congru à x' modulo 2π s'il existe k$\in \mathbb{Z}$ tel que $x - x' = 2k\pi$ (ou encore $x = x' + 2k\pi$). Dans ce cas, on note $x \equiv x'[2\pi]$. On lit : « x congru à x' modulo 2π).

Exemple et contre-exemple :

- $\frac{\pi}{2}$ est congru à $\frac{9\pi}{2}$ modulo 2π. En effet : $\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{2} = -4\pi = 2(-2)\pi$, $k = -2$. On note $\frac{\pi}{2} \equiv \frac{9\pi}{2}[2\pi]$.
- π n'est pas congru à $\frac{\pi}{4}$ modulo 2π. En effet, supposons que π est congru à $\frac{\pi}{4}$ modulo 2π. Il existe k $\in \mathbb{Z}$ tel que $\pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$. Or $\pi - \frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{4}$ donc $2k\pi = 3\frac{\pi}{4}$ d'où $k = \frac{3}{8} \in \mathbb{Z}$. Absurde donc π n'est pas congru à $\frac{\pi}{4}$ modulo 2π.

Propriété

$x \equiv x'[2\pi] \Leftrightarrow x' \equiv x[2\pi]$

Preuve

$x \equiv x'[2\pi] \Leftrightarrow$ il existe k$\in \mathbb{Z}$ tel que $x - x' = 2k\pi$

$\Leftrightarrow x' - x = 2(-k)\pi$. Posons $k' = -k$; on a donc $k' \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow$ il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $x' - x = 2k'\pi$.

$x \equiv x'[2\pi] \Leftrightarrow x' \equiv x[2\pi]$

b. Remarques

- Tout angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ a une infinité de mesures en radians.
- Si α est une mesure en radians de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ alors pour toute autre mesure en radians β de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, on a : $\beta \equiv \alpha[2\pi]$.
- Réciproquement si $\beta \equiv \alpha[2\pi]$ alors α et β sont les mesures en radians d'un même angle orienté.

- La mesure principale en radians d'un angle orienté est l'unique mesure appartenant à $]-\pi;\pi]$.

c. Mesure principale d'un angle orienté connaissant une de ses mesures

Exemples

Déterminons la mesure principale en radians d'un angle orienté dont l'une des mesures est $-\frac{15\pi}{4}$ rad.

Soit θ la mesure principale en radians de cet angle orienté donc $\theta = -\frac{15\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in]-\pi;\pi]$.

✓ **Méthode 1 :** On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} \theta = -\frac{15\pi}{4} + 2k\pi \\ \theta \in]-\pi ; \pi] \end{cases}$

$$\begin{cases} \theta = -\frac{15\pi}{4} + 2k\pi \\ \theta \in]-\pi ; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow -\pi < -\frac{15\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$$

$$\Leftrightarrow -\pi + \frac{15\pi}{4} < 2k\pi \leq \pi + \frac{15\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{11\pi}{4} < 2k\pi \leq \frac{19\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{8} < k \leq \frac{19}{8}$$

$$\Leftrightarrow 1{,}375 < k \leq 2{,}375\ .$$

$\Leftrightarrow k = 2$ car 2 est le seul entier relatif compris entre $1{,}375$ et $2{,}375$

Par suite $\theta = -\frac{15\pi}{4} + 2(2)\pi = \frac{\pi}{4}$; $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad

✓ **Méthode 2 :** On décompose -15π en fonction du multiple entier de 8π qui lui est le plus proche : Le multiple entier de 8π le plus proche de -15π est -16π. On a donc :

$\frac{-15\pi}{4} = \frac{-16\pi+\pi}{4} = -4\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 4\pi$ donc $\frac{-15\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2(-2)\pi$ d'où $\frac{-15\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{-15\pi}{4}$ sont les mesures en radians d'un même angle orienté et comme $\frac{\pi}{4} \in]-\pi ; \pi]$ donc la mesure principale est $\frac{\pi}{4}$.

Exercice d'application

Déterminer la mesure principale en radians d'un angle orienté dont l'une des mesures est $\frac{23\pi}{8}$ rad.

1. Egalités de deux angles orientés

a. Définition

Deux angles orientés $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u}',\vec{v}'})$ sont égaux si une mesure en radians quelconque de l'un est congrue modulo 2π à une mesure en radians quelconque de l'autre. Autrement dit $(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u}',\vec{v}')[2\pi]$.

b. Remarque

- Deux angles orientés $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u}',\vec{v}'})$ sont égaux si et seulement si ils ont la même mesure principale.
- $(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u}',\vec{v}')[2\pi] \Rightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u}',\vec{v}')[\pi]$ (La réciproque est fausse).
- $(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u}',\vec{v}')[\pi] \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u}',\vec{v}')[2\pi]$ ou bien $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \big((\vec{u}',\vec{v}') + \pi\big)[2\pi]$

6. Propriétés sur les mesures des angles orientés

- $(\vec{u},\vec{u}) \equiv 0[2\pi]$
- $(\vec{u},-\vec{u}) \equiv (-\vec{u},\vec{u}) \equiv \pi[2\pi]$
- $(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) \equiv (\vec{u},\vec{w})[2\pi]$ (**Relation de Chasles**).
- $(\vec{u},\vec{v}) \equiv -(\vec{v},\vec{u})[2\pi]$
- $(-\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u},-\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v}) + \pi[2\pi]$
- $(-\vec{u},-\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v})[2\pi]$
- Si $kk' > 0$ alors $(k\vec{u},k'\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v})[2\pi]$
- Si $kk' < 0$ alors $(k\vec{u},k'\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v}) + \pi[2\pi]$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens $\Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv 0[2\pi]$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires $\Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv \pi[2\pi]$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv 0[\pi]$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $(\vec{u},\vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ($\Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{2}[\pi]$).

Exemple

Soit $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$. Déterminer $(\vec{u},-\vec{v})$; $(2\vec{u},\vec{v})$; $(-\vec{u},3\vec{v})$ et $(-2\vec{u},-3\vec{v})$

Exercice

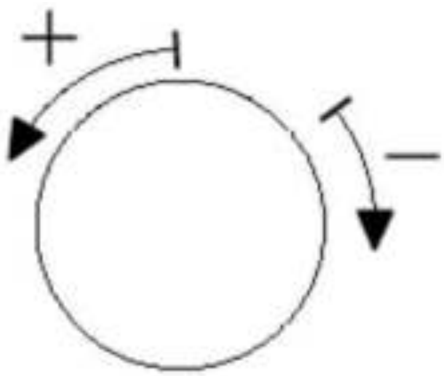
Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A direct. Déterminer $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA})$ et $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BA})$.

II. Trigonométrie

On choisit une unité de longueur une fois pour toute.

1. Orientation du plan

Soit (C) un cercle donné du plan. On admet qu'il n'y a que deux sens de parcours possibles sur (C) : le sens contraire des aiguilles d'une montre (+) et le sens des aiguilles d'une montre (-).

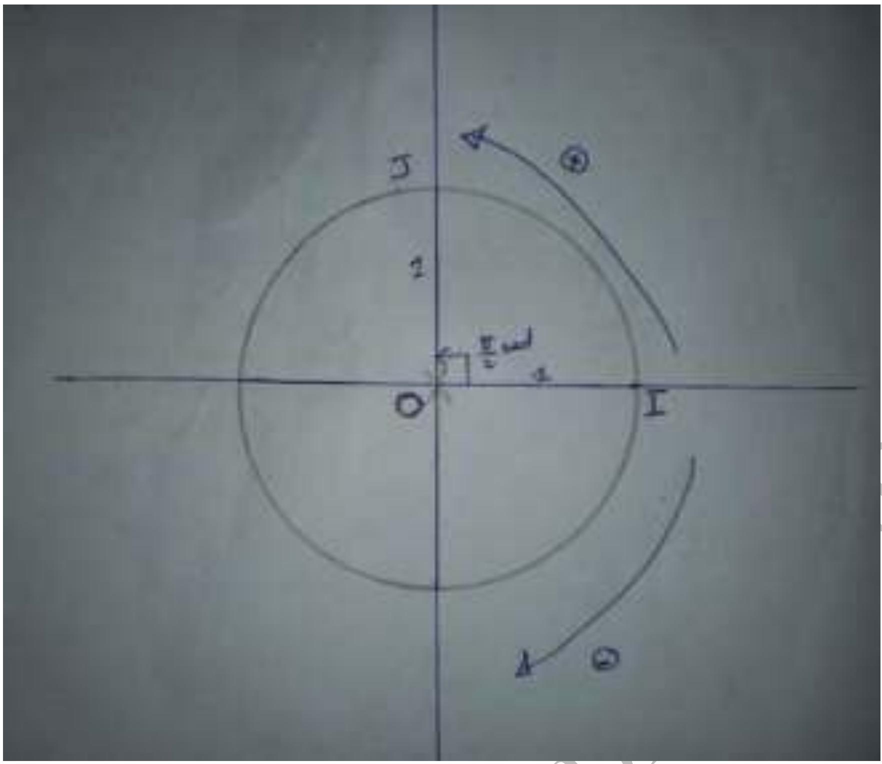


- Orienter le cercle, c'est choisir l'un de ces deux sens de parcours. Le sens choisi est généralement le sens contraire des aiguilles d'une montre. Ce sens choisi est dit sens direct ou trigonométrique ou positif. L'autre sens est dit indirect ou négatif ou rétrograde.
- Orienter le plan, c'est choisir une bonne fois pour toutes un point fixe O appelé origine mais aussi choisir le sens contraire des aiguilles d'une montre comme sens positif sur tous les cercles du plan.

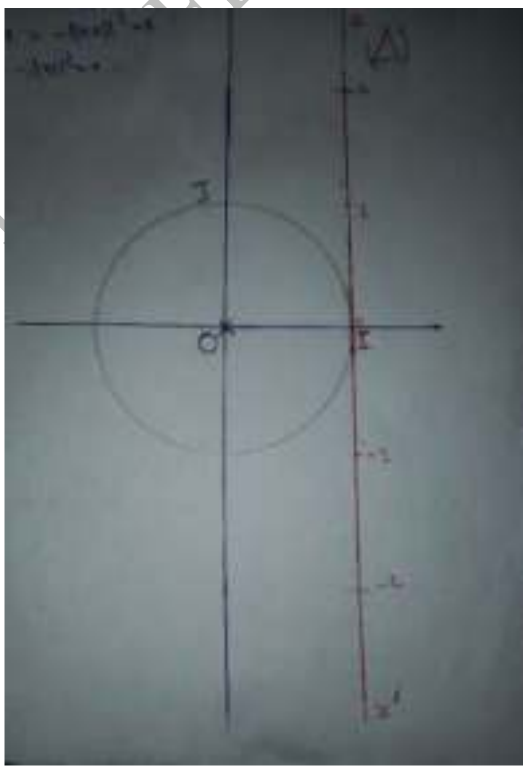
2. Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

a. Cercle trigonométrique

Dans le plan orienté, on considère un repère orthonormé direct (O, I, J) (c'est-à-dire $OI = OJ = 1$ *et* $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$). On appelle cercle trigonométrique, le cercle (C) de centre O et de rayon 1 sur lequel, on a choisi I appelé origine des arcs.



b. Image d'un réel sur le cercle trigonométrique



Soit (C), le cercle trigonométrique, on considère la droite (Δ) tangente à (C) en I munie du repère $(I, \overrightarrow{OJ})$. Ainsi (Δ) représente l'ensemble des nombres réels ℝ.

On enroule la droite (Δ) autour de (C) de la façon suivante :

- la demi-droite $[Ix)$ des points de (Δ) d'abscisses positives est enroulée dans le sens direct ;
- la demi-droite $[Ix')$ des points de (Δ) d'abscisses négatives est enroulée dans le sens indirect.

Ainsi, chaque point m de (Δ) d'abscisse x vient se superposer sur un seul point M de (C). On dit que M est l'image du réel x sur le cercle trigonométrique et x est dit abscisse curviligne du point M de (C). Par exemple, l'image de 0 sur (C) est I, celle de $\frac{\pi}{2}$ est J, l'image de π est le point I' diamétralement opposé à I, celle de $-\frac{\pi}{2}$ est J', diamétralement opposé à J.

Par ce procédé d'enroulement de la droite des réels (Δ) autour de (C), chaque réel x a une et une seule image M sur (C). On remarque que $x, x+2\pi; x+4\pi \ldots x-2\pi; x-4\pi$ ou plus généralement $x+2k\pi$; k$\in \mathbb{Z}$ ont la même image M sur le cercle (C).

Chacun des nombres réels, ...$x-4\pi; x-2\pi; x; x+2\pi; x+4\pi; \ldots;$ $x+2k\pi$; k$\in \mathbb{Z}$ est une abscisse curviligne de M. Ainsi tout point M de (C) a une infinité d'abscisses curvilignes.

Ainsi, si $x \equiv x'[2\pi]$ alors x et x' ont la même image sur le cercle trigonométrique.

Réciproquement, si deux réels x et x' ont la même image sur (C) alors $x \equiv x'[2\pi]$.

c. Remarque

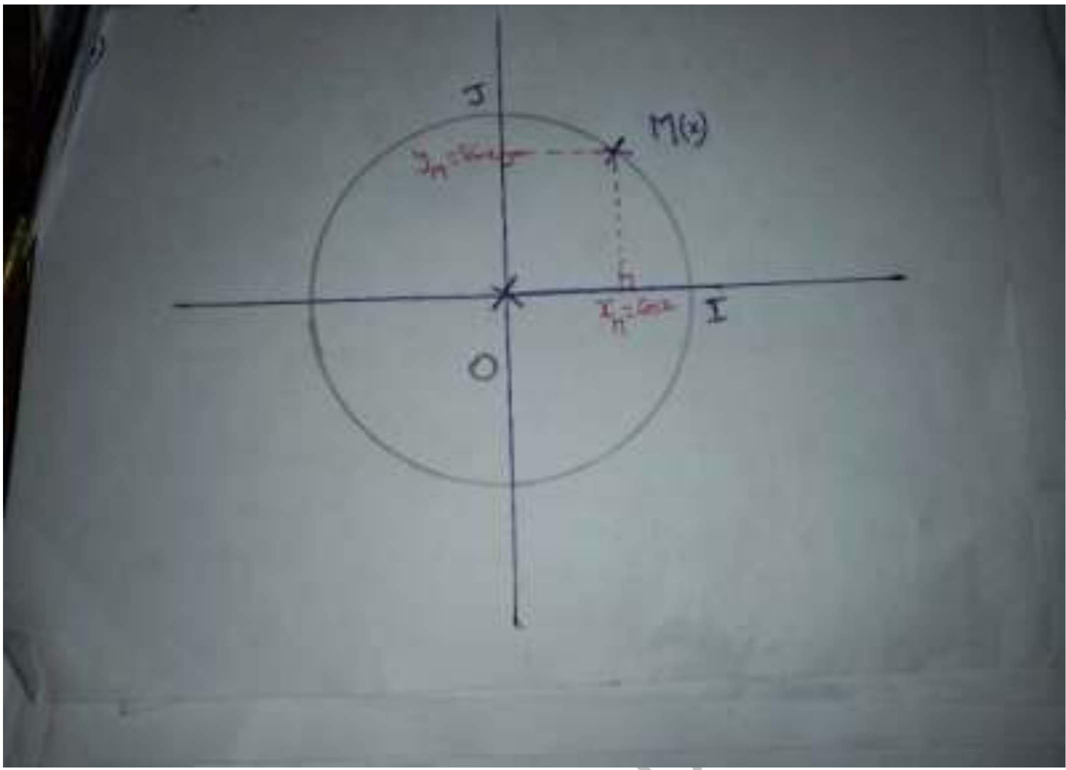
Si M est l'image d'un réel x sur (C) alors x est une mesure en radians de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}})$.

3. Cosinus, sinus et tangente d'un réel

a. Définitions

Soit x un réel quelconque, M son image sur le cercle trigonométrique (C).

- Le cosinus de x noté $\cos x$ est l'abscisse du point M dans le repère (O, I, J).
- Le sinus de x noté $\sin x$ est l'ordonnée du point M dans le repère (O, I, J).



- Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$ et $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, la tangente de x notée $\tan x$ est le réel défini par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- Si $x \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors la cotangente de x notée cotan x est $\text{cotan}\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$.
- Les valeurs de $\cos x$, de $\sin x$ et de $\tan x$ sont dites lignes trigonométriques du réel x.

b. **Propriétés :** Pour tout réel x tel que $\tan x$ existe on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$; $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ et $\tan(x + 2k\pi) = \tan x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

c. **Lignes trigonométriques particulières**

Le tableau suivant donne des lignes trigonométriques particulières. Il est à connaitre par cœur.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie	0

d. Signe du cosinus et du sinus dans les quatre quadrants

Le cercle trigonométrique se subdivise en quatre parties égales dites quadrant : l'arc $\widehat{IJ}$, l'arc $\widehat{JI'}$, l'arc $\widehat{I'J'}$ et l'arc $\widehat{J'I}$.

- Si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ alors l'image M de x appartient à l'arc $\widehat{IJ}$ et donc $\cos x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$
- Si $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ alors l'image M de x appartient à l'arc $\widehat{JI'}$ et donc $\cos x \leq 0$ et $\sin x \geq 0$
- Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ alors l'image M de x appartient à l'arc $\widehat{IJ'}$ et $\cos x \geq 0$ et $\sin x \leq 0$
- Si $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ alors l'image M de x appartient à l'arc $\widehat{J'I'}$ et $\cos x \leq 0$ et $\sin x \leq 0$

e. Relations trigonométriques

Pour tout réel x tel que $\tan x$ existe on a :

- $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$ et $\tan(-x) = -\tan x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\tan(\pi - x) = -\tan x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$; $\sin(\pi + x) = -\sin x$ et $\tan(\pi + x) = \tan x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ et $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Ces formules sont dites formules de duplication.
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Ces deux formules sont dites formules de linéarisation.

Exercice d'application

Calculer $\cos(\frac{2\pi}{3})$ et $sin(\frac{2\pi}{3})$. En déduire $\cos(\frac{5\pi}{3})$ et $sin(\frac{5\pi}{3})$.

Exercice à faire

Calculer $\cos(\frac{5\pi}{6})$ et $sin(\frac{5\pi}{6})$. En déduire $\cos(\frac{11\pi}{6})$ et $sin(\frac{11\pi}{6})$.

f. Formules d'addition: $a, b \in \mathbb{R}$

- $cos\ (a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $cos\ (a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin\ (a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Exercice d'application

1. Vérifier que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $sin(\frac{\pi}{12})$
2. Vérifier que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$. En déduire $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $sin(\frac{5\pi}{12})$

g. Formules transformant une somme en produit

Les formules suivantes sont dites formules de factorisation et permettent de transformer une somme d'expressions trigonométriques en un produit. Elles s'obtiennent à partir des formules d'addition et il n'est pas nécessaire de les retenir par cœur.

Soient a et b des réels, on a :

- $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos(\frac{a-b}{2})$
- $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin(\frac{a-b}{2})$
- $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos(\frac{a-b}{2})$
- $\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin(\frac{a-b}{2})$

h. Formules transformant un produit en une somme

Les formules suivantes permettent de transformer un produit d'expressions trigonométriques en une somme. Elles s'obtiennent à partir des formules d'addition et il n'est pas nécessaire de les retenir par cœur.

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

4. Equations trigonométriques

Soit a un réel fixé.

a. Du type $\cos x = \cos a$

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \quad ou\ bien \\ x = -a + 2k'\pi \end{cases} : k, k' \in \mathbb{Z}$$

Exemple

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

b. En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$.

Solution

1. $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \end{cases} ; k, k' \in \mathbb{Z}$ d'où $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}\right\}$

2. $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \in S; -\pi < -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \leq \pi \Leftrightarrow k' = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \in S$

D'où $S = \left\{\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right\}$

b. Du type $\sin x = \sin a$

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \quad ou\ bien \\ x = \pi - a + 2k'\pi \end{cases} : k, k' \in \mathbb{Z}$$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0; 2\pi]$ $\sin x = \sin\frac{5\pi}{4}$

c. Du type $\tan x = \tan a$

Supposons que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0; 2\pi]$ $\tan x = \tan\frac{\pi}{4}$

d. Du type $\cos x = a$ et $\sin x = a$

- Si $a \notin [-1; 1]$ alors les équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ n'ont pas de solutions donc $S = \emptyset$.

- Si $a \in [-1;1]$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$: $a = \cos\alpha = \sin\alpha$. Par suite $\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou bien} \\ x = -\alpha + 2k'\pi \end{cases}$: $k, k' \in \mathbb{Z}$ et $\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou bien} \\ x = \pi - \alpha + 2k'\pi \end{cases} : k, k' \in \mathbb{Z}$

b. Exemples

Résolvons dans $\mathbb{R}$, $\cos x = \frac{1}{2}$ et $\sin x = -3$

Solution

- $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \end{cases}; k, k' \in \mathbb{Z}$ d'où $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}\right\}$
- $-3 \notin [-1,1]$ donc $\sin x = -3$ n'a pas de solution d'où $S = \emptyset$.

f. Du type $\tan x = a$

$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi;\ a = \tan\alpha; k \in \mathbb{Z}$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\tan x = 1$

Solution

$\tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

5. Conséquences

Soit θ un réel donné, on a :

i. $\begin{cases} \cos x = \cos\theta \\ \sin x = \sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv \theta[2\pi]$

ii. $\begin{cases} \cos x = \cos\theta \\ \sin x = -\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv -\theta[2\pi]$

iii. $\begin{cases} \cos x = -\cos\theta \\ \sin x = \sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv (\pi - \theta)[2\pi]$

iv. $\begin{cases} \cos x = -\cos\theta \\ \sin x = -\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv (\pi + \theta)[2\pi]$

Exemple

Résolvons les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

CHAPITRE 4 : Forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe.

Durée : 4h (Cours)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer et utiliser les propriétés d'un argument d'un nombre complexe ;
- ✓ Restituer la forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe et leurs notations ;
- ✓ Restituer et utiliser les formules d'Euler et la formule de Moivre ;
- ✓ Linéariser des expressions trigonométriques ;
- ✓ Déterminer les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.
- ✓ Utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes de géométrie.

Prérequis :

- ✓ Mesures d'un angle orienté ;
- ✓ Forme algébrique d'un nombre complexe ;

Supports didactiques :

- ✓ Nouveau Transmath (Term S);
- ✓ Visa Bac ;
- ✓ CIAM Terminale SE ;
- ✓ CIAM TSM ;
- ✓ Mathématiques terminales A1B ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

I. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1. Arguments d'un nombre complexe

a. Définition

b. **Remarques**

c. **Exemples**

d. **Propriété**

e. **Interprétation géométrique de $\arg(z_B - z_A)$ et $\arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A})$**

2. **Forme trigonométrique**

a. **Théorème-définition**

b. **Remarques**

c. **Exemples**

3. **Propriétés sur les arguments et Formule de Moivre**

a. **Propriétés algébriques**

b. **Formule de Moivre**

II. **Forme exponentielle d'un nombre complexe**

1. **Propriété-définition**
2. **Exemples**
3. **Propriétés**
4. **Formules d'Euler**
5. **Remarque**

III. **Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité**

1. **Définition**
2. **Exemple**
3. **Propriétés**
4. **Exemple**

IV. **Nombres complexes et configurations géométriques**

1. **Triangle isocèle**
2. **Triangle équilatéral**
3. **Triangle rectangle**
4. **Triangle rectangle et isocèle**
5. **Alignement de 3 points**

Déroulement du cours :

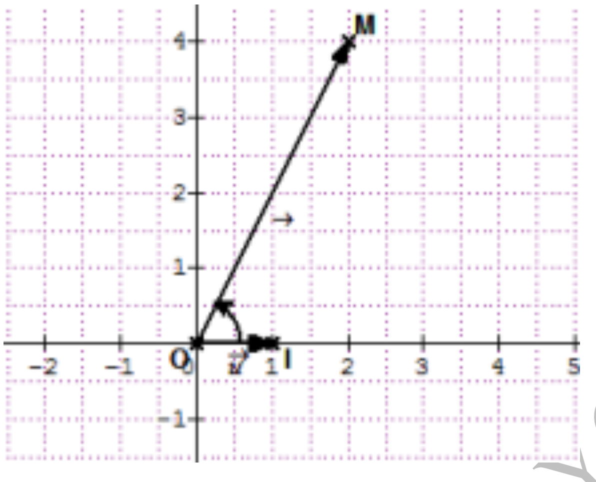
Dans tout ce chapitre, le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et l'écriture $z = a + bi$ est la forme algébrique du nombre complexe z.

I. Formes trigonométriques d'un nombre complexe

1. Arguments d'un nombre complexe

a. Définition

Soit z un nombre complexe **non nul** et M son image dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On appelle argument de z, une mesure en radians θ de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$.



b. Remarques

- Un nombre complexe z non nul a une infinité d'arguments car $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$ a une infinité de mesures en radians. L'ensemble des arguments d'un nombre complexe z non nul noté $\arg(z)$ est donc l'ensemble des mesures en radians de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$. Ainsi, on a : $\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et on écrit : $\arg(z) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$.
- Si θ est une mesure en radians de $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$ alors $\arg(z) = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$ (on écrit : $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$).
- Deux arguments d'un même nombre complexe non nul z sont congrus modulo 2π.
- Si z est un nombre complexe non nul a pour vecteur image $\vec{U}$ alors $\arg(z) \equiv (\vec{u}, \vec{U})[2\pi]$
- Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument.

c. Exemples

- 0 est un argument du nombre complexe 1 et donc l'ensemble des arguments de 1 est $\arg(1) = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et on écrit : $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$. En effet si M_1 est l'image de 1 dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$ alors un argument de 1 est une mesure en radians de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}})$.

or $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM_1}})$ est l'angle orienté nul car $\vec{u} = \overrightarrow{OM_1}$ donc 0 est une mesure en radians de $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM_1}})$ et par conséquent 0 est un argument de 1. Ainsi, l'ensemble des arguments de 1 est $\arg(1) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) + 2k\pi = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

De même, on montre que :

- π est un argument de -1 et l'ensemble des arguments de -1 est $\arg(-1) = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. On écrit : $\arg(-1) \equiv \pi[2\pi]$.
- $\frac{\pi}{2}$ est un argument de i et l'ensemble des arguments de i est $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. On écrit $\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- $-\frac{\pi}{2}$ est un argument de $-i$ et l'ensemble des arguments de $-i$ est $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. On écrit : $\arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Plus généralement on a :

- z est un réel strictement positif $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi]$
- z est un réel strictement négatif $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$
- z est un réel $\Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg(z) \equiv 0[\pi]$
- $z = bi; b > 0 \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $z = bi; b < 0 \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $z = bi; b \neq 0 \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

d. Propriété : Soit $z \in \mathbb{C}^*$

Si $z = a + bi$ et θ un argument de z alors on a : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$

Exercice d'application : Déterminons les arguments de chacun des nombres complexes suivants :$1 + i, 1 + \sqrt{3}i$ et $\sqrt{3} - i$.

e. Interprétation géométrique de $\arg(z_B - z_A)$ et $\arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A})$

Si A, B, C et D des points 2 à 2 distincts alors on a :

- $\arg(z_B - z_A) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$

- $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})[2\pi]$

Exercice d'application : Soit $z \neq -3$. On pose $Z = \frac{z+1-i}{z+3}$.

1. Donner une interprétation géométrique de $\arg(Z)$.
2. En déduire l'ensemble des points M(z) tels que :
   - **a.** $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$
   - **b.** $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

a. Théorème-définition

Si $z = a + bi$ et θ un argument de z alors $a = |z|\cos\theta$ et $b = |z|\sin\theta$ et par conséquent $z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. L'écriture $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ est dite la forme trigonométrique de z.

b. Remarque

- Un nombre complexe non nul z admet une infinité d'écritures correspondant à sa forme trigonométrique car il admet une infinité d'arguments et que chaque argument de z permet de donner une écriture trigonométrique de z.
- $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z')[2\pi]$

c. Exemple

Donnons la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

3. Propriétés sur les arguments et Formule de Moivre

a. Propriétés algébriques: Soient z, z' $\in \mathbb{C}^*$

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$ où $n \in \mathbb{Z}$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) \equiv \arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$

Exercice d'application

Déterminons les arguments de chacun des nombres complexes $z_1 = (-1+i)(1-\sqrt{3}i)$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{1+i}$ et $z_3 = (\sqrt{3}-i)^4$

b. Formule de Moivre

Si $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ alors on a : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Exercice d'application

Donner l'écriture algébrique de $(1+\sqrt{3}\,i)^{2021}$

II. Forme exponentielle d'un nombre complexe

1. Théorème-définition

Si z un nombre complexe non nul, θ un argument de z et si on note par $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$ alors $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}$. L'écriture $z = |z|e^{i\theta}$ où $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ est dite la forme exponentielle de z.

2. Exemples particuliers

- $1 = \cos 0 + i\sin 0 = e^{i0}$ *donc* $1 = e^{i0}$
- $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$ donc $-1 = e^{i\pi}$
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
- $-i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

3. Propriétés : Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$

- $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ où $n \in \mathbb{Z}$ **(Formule de Moivre sous forme exponentielle).**
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

4. Formules d'Euler

Si $\theta \in \mathbb{R}$ alors $\begin{cases} \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$

Exemple : Linéarisons $cos^3 x$

Définition : Linéariser une expression trigonométrique, c'est l'écrire comme une somme de termes de la forme $\alpha\, cos(ax+b)$ ou $\beta\, sin(a'x+b')$.

Pour linéariser une expression trigonométrique, on peut utiliser les formules d'Euler.

5. Remarque

- Un nombre complexe non nul z admet une infinité d'écritures correspondant à sa forme exponentielle.
- Le nombre complexe 0 n'a pas de forme exponentielle.

III. Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

1. Définition : Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$

On appelle racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$.

2. Remarque

Pour $n = 2$ et $n = 3$, on dit respectivement racine carrée et racine cubique de l'unité.

3. Exemple

$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ est une racine cubique de l'unité car $(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = 1$

4. Propriétés

- Les racines carrées de l'unité c'est-à-dire les nombres complexes z tels que $z^2 = 1$ sont : 1 et -1.
- Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les nombres complexes que l'on peut numéroter par un entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$. Elles sont donc notées z_k et sont données par $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.
- Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont au nombre de n $(z_0, z_1, \ldots\ldots, z_{n-1})$ et leur somme vaut zéro : $z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1} = 0$.

5. Exercice d'application

Déterminons les racines cubiques de l'unité c'est-à-dire les nombres complexes z tels que $z^3 = 1$.

IV. Nombres complexes et configurations géométriques

A, B et C sont trois points deux à deux distincts.

1. **Triangle isocèle**

$\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow$ ABC est isocèle en A. En effet $\frac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|} = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Leftrightarrow AC = AB \Leftrightarrow$ ABC isocèle en A.

2. **Triangle équilatéral**

$\begin{cases} \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow$ ABC équilatéral. En effet : $\begin{cases} \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \text{ABC isocèle en A} \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ABC isocèle en A} \\ \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3} \\ \widehat{ABC} = \frac{\pi}{3} \\ \widehat{ACB} = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$ ABC équilatéral.

3. **Triangle rectangle**

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = bi; b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Leftrightarrow$ ABC est rectangle en A. En effet : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = bi; b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Leftrightarrow$

$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow$ ABC est un triangle rectangle en A.

4. **Triangle rectangle et isocèle**

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \pm i \Leftrightarrow$ ABC est rectangle et isocèle en A. En effet : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \pm i$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ABC isocèle en A} \\ \text{ABC rectangle en A} \end{cases} \Leftrightarrow$ ABC est rectangle et isocèle en A.

$\begin{cases} \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ABC isocèle en A} \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ABC isocèle en A} \\ \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$ ABC est rectangle et isocèle en A.

5. **Alignement de trois points**

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Leftrightarrow A, B$ et C sont alignés. En effet : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow A, B$ et C sont alignés.

CHAPITRE 5 : FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Durée : 6h (Cours)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer et utiliser les limites $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ où α est un nombre rationnel strictement positif ;
- ✓ Déterminer les primitives d'une fonction du type $\frac{u'}{u}$.

Prérequis :

- ✓ Primitives d'une fonction ;
- ✓ Calculs de limites ;
- ✓ Calculs de dérivées.

Supports didactiques :

- ✓ CIAM TSM ;
- ✓ Visa Bac ;
- ✓ CIAM Terminale SE ;
- ✓ Nouveau transmath programme 1998 ;
- ✓ Livre de TS2 de M. Saloly Ba ;
- ✓ Cours de TS2 de M. Babacar Djitté ;
- ✓ Cours de TS2 de M. Elimane Bousso ;
- ✓ Programme sénégalais.

Plan du chapitre

I. Définition, notation et propriétés

1. **Définition et notation**
2. **Conséquences immédiates**
3. **Premières propriétés**
4. **Autres propriétés**

II. Etude de la fonction ln

1. **Ensemble de définition et limites aux bornes**
2. **Branches infinies**
3. **Tableau de variation**

Déroulement du cours

Introduction orale :

Le mot logarithme signifie l'exposant qu'on affecte à un nombre pour en obtenir un autre. L'adjectif népérien vient du mathématicien écossais John Napier (1550-1617) dont le nom a été francisé en « Neper » et c'est lui qui a inventé le concept de logarithmes en 1614. Nous savons que sans calculatrice, il est plus facile d'additionner des nombres que de les multiplier. Ainsi, le but de Napier était de simplifier le calcul d'un produit en général et d'une puissance en particulier en le ramenant à celui d'une somme. Le concept de logarithme a donné naissance aux tables de logarithmes, au pH-mètre et à la règle à calcul inventée par l'anglais EDMUND GUNTER EN 1620. Ce dernier resta l'outil de calcul privilégié des ingénieurs et techniciens jusqu'à son abandon définitif au début des années 1970 au profit des calculatrices électroniques de poche.

I. Définition, notation et propriétés

Activité

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ et $f(x) = \frac{1}{x^n}$. Donner les primitives de f sur $]0; +\infty[$.

Réponse

F telle que $F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de f donc les primitives de f sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$ où c est une constante.

Pour $n = 1$, c'est-à-dire si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors quelles sont les primitives de f sur $]0;+\infty[$? Pour répondre à cette question, nous proposons d'étudier dans ce chapitre l'une des primitives de f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

1. Définition et notation

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc elle y admet des primitives. Ainsi, sa primitive sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 est dite logarithme népérien et est notée ln (on lit « éléne »).

2. Conséquences immédiates

D'après la définition, on a:

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0;+\infty[$ et on peut noter : $\ln :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \ln x$
- $\ln 1 = 0$.
- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

3. Premières propriétés

- La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. En effet, pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a $\frac{1}{x} > 0$ donc $(\ln)'(x) > 0$.

Soient a et b des nombres réels :

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ a = b \end{cases}$
- $\ln(a) \leq \ln(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \leq b \end{cases}$
- $\ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ a \geq b \end{cases}$

Exercice d'application : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l''équation et l'inéquation suivante :

1. $\ln(x^2 + 2x) = \ln(x + 6)$

2. $\ln(2x + 1) \geq \ln(x - 1)$

4. **Autres propriétés :** Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ **(propriété fondamentale).**
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$
- Pour tout nombre rationnel r, $\ln(a^r) = r\ln a$

Preuve

- Soit f la fonction telle que $f(x) = (u \circ v)(x)$ avec $u(x) = ln\, x$ et $v(x) = ax$. On a donc $f(x) = \ln(ax)$. v est dérivable sur $]0; +\infty[$ et u est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $\in\,]0; +\infty[$, $v(x) = ax \in\,]0; +\infty[$. Par suite la fonction f telle que $f(x) = (u \circ v)(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in\,]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$ or $v'(x) = a$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$ d'où $f'(x) = a \times \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$ par suite f et ln sont des primitives sur $]0; +\infty[$ de la même fonction d'où pour tout $\in\,]0; +\infty[$, $f(x) = \ln x + c$.

Ainsi pour tout $\in\,]0; +\infty[$, $\ln(ax) = \ln x + c$.

Pour $x = 1$ on a ln a=c d'où pour tout $\in\,]0; +\infty[$, $\ln(ax) = \ln x + \ln a = \ln a + lnx$. En particulier pour $x = b$, on a $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

- $\ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$ d'où $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$ d'où $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
- **(admise)**

Exercice d'application

1. Ecrire ln 35 en fonction de ln 5 et de ln 7.
2. Ecrire ln 8 en fonction de ln 2. En déduire $\ln\frac{8}{3}$ en fonction de ln 2 et de ln3.
3. Ecrire $\ln\sqrt{48}$ en fonction de ln 2 et de ln3.
4. Simplifier le réel A= $\ln(\sqrt{\sqrt{3}+1}) + \ln(\sqrt{\sqrt{3}-1})$

Remarque

- $\frac{\ln a}{\ln b} \neq \ln\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)$ par conséquent $\frac{\ln a}{\ln b} \neq \ln a - \ln b$.
- Si $a < 0$ et $b < 0$ alors $\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|$ et $\ln\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right) = \ln|a| - \ln|b|$.

II. Etude la fonction ln

La fonction ln est définie par : $\ln :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln x$$

1. Ensemble de définition et limites aux bornes

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $\mathrm{D}_{\ln} =]0;+\infty[$
- Limites aux bornes de $\mathrm{D}_{\ln}$:
  - ✓ $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (limite admise)
  - ✓ $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

En effet $\ln x = -\ln\frac{1}{x}$. En posant $X = \frac{1}{x}$. Donc si $x \to +\infty$ alors $X \to 0^+$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = \lim\limits_{X\to 0^+} -\ln X = +\infty$.

2. Branches infinies

- On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est une asymptote verticale à $\mathrm{C}_{\ln}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

En effet : D'une part si ≥ 1 *alors* $\ln x \geq 0$ (1) . D'autre part, posons $f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$. f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$. Or si $x \geq 1$ alors $\sqrt{x} \geq 1$ donc $1 - \sqrt{x} \leq 0$ d'où f est décroissante sur $[1,+\infty[$. Donc si $x \geq 1$ alors $f(x) \leq f(1)$ Par suite $\ln x - 2\sqrt{x} \leq -2$ c'est-à-dire $\ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$ (2)

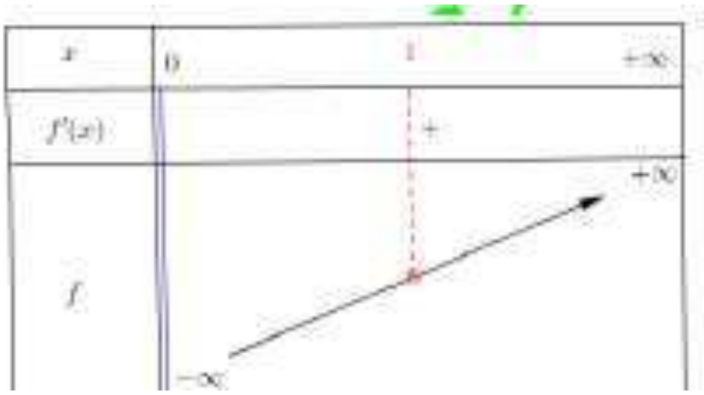
Les inégalités (1) et (2) montrent que si $x \geq 1$ alors $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$ d'où

$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}-2}{x}$ or $\frac{2\sqrt{x}-2}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} = 0$ et donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $C_{\ln}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses en $+\infty$

3. Tableau de variation

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Ainsi on peut dresser son tableau de variations sur $]0;+\infty[$.



a. Signe de lnx

- $x \in]0;1] \Leftrightarrow \ln x \leq 0$
- $x \in [1;+\infty[\Leftrightarrow \ln x \geq 0$

b. Nombre d'Euler ou constante de Neper

La fonction ln est dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\ln(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$ or $1 \in]-\infty;+\infty[$ donc l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$. Cette unique solution est notée e et est dite nombre d'Euler ou constante de Neper. Ainsi on a : $e \in]0;+\infty[$ et $\ln e = 1$.

On a démontré que $e \approx 2{,}7182818284 56$ …. et on prend souvent comme valeur approchée $e \approx 2{,}718$

4. Courbe représentative de ln

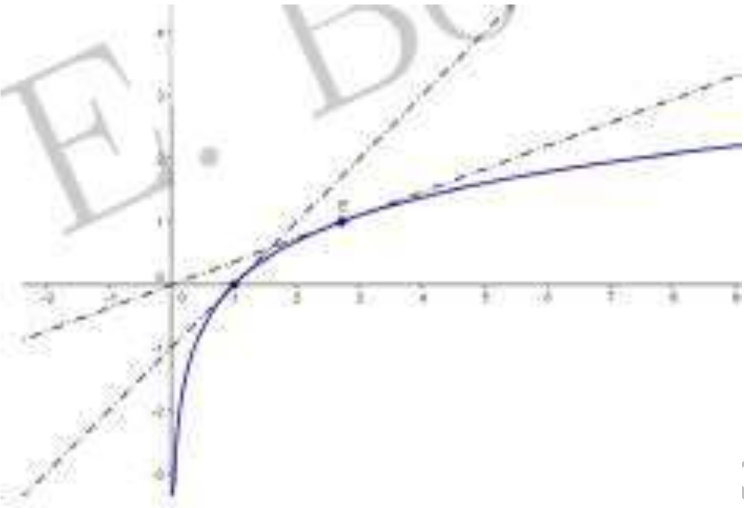
a. Tangentes à $C_{\ln}$ aux points d'abscisses 1 et e

La fonction ln est dérivable est dérivable en 1 et e donc $C_{\ln}$ admet aux points d'abscisses 1 et e des tangentes (T) et (T') respectivement de coefficients directeurs respectifs $ln'(1) = 1$ et $ln'(e) = \frac{1}{e}$.

b. Tableau de valeurs

x	1	e	4	5	6
ln x	0	1	1,4	1,6	1,8

c. Courbe



5. Limites usuelles

Soit α un nombre rationnel strictement positif, on admet les limites suivantes dites limites usuelles :

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0^-$. En particulier $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0^+$. En particulier $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Exercice d'application : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x (\ln x)^2$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$

III. Fonction composée $\boldsymbol{ln \circ u}$

Si u est une fonction alors la fonction f telle que $f = \ln \circ$ u est définie par f$(x) = \ln$ [u(x)]

1. Ensemble de définition de $\boldsymbol{ln \circ u}$

Si $\mathrm{f}(x) = \ln [\mathrm{u}(\mathrm{x})]$ alors $\mathrm{f}(x)$ existe ssi $u(x)$ existe et $u(x) > 0$.

a. Exemple

Déterminons l'ensemble définition de la fonction f elle que $\mathrm{f(x)} = \ln(-x^2 - x + 6)$

b. Remarque

Si $f(x) = \ln(|u(x)|)$ alors $f(x)$ existe ssi $u(x)$ existe et $u(x) \neq 0$. Par exemple la fonction définie par $f(x) = \ln|-x^2 - x + 6|$ existe ssi $-x^2 - x + 6 \neq 0$ et c'est-à-dire ssi $x \neq -2 \; et \; x \neq 3$.

2. Limites de $\ln \circ \boldsymbol{u}$

Soit a $\in \mathbb{R}$ ou a=∞, $l \in [0; +\infty[$ ou l=+∞ et l' $\in \mathbb{R}$ ou l'=∞.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = l$ et si $\lim\limits_{x \to l} \ln \mathrm{x} = l'$ alors $\lim\limits_{x \to a} \ln [\mathrm{u(x)}] = \mathrm{l}'$

Exemple : calculons les limites suivantes

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(\frac{x+1}{x+3})$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\frac{x}{x^2+1})$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(\frac{x+1}{x^2})$

3. Dérivée de $\boldsymbol{ln \circ u}$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $u(x) > 0$ pour tout x dans I alors la fonction f définie par $f(x) = \ln [\mathrm{u(x)}]$ est dérivable sur I et pour tout x dans I, on a :

$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \ln'[\mathrm{u(x)}] = \frac{u\prime(x)}{u(x)}$

a. Exemple

Montrons que f définie $f(x) = ln(x^2 + x - 6)$ est dérivable sur $]-\infty; -3[$ puis calculons $f'(x)$ sur $]-\infty; -3[$

b. Remarque

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $u(x) \neq 0$ pour tout x dans I alors la fonction f définie par $f(x) = \ln[|u(x)|]$ est dérivable sur I et pour tout x dans I, on a :

$$f'(x) = \ln'[|u(x)|] = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

4. Conséquence

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $u(x) \neq 0$ pour tout x dans I alors la fonction f définie par $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet une primitive F sur I définie par $F(x) = \ln[|u(x)|]$. Si de plus $u(x) > 0$ pour tout x dans I alors $F(x) = \ln[u(x)]$

Exemple

Déterminons une primitive de f telle que $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-6}$ sur $]-\infty; -3[$ puis sur $]-3; 2[$

IV. Logarithme décimal

1. Définition

La fonction logarithme décimal ou logarithme à base 10, notée log est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

2. Propriétés

La fonction logarithme décimal a les mêmes propriétés que la fonction logarithme népérien.

CHAPITRE 6: Ecriture complexe d'une similitude plane directe.

Durée : 7h (Cours)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Déterminer l'écriture complexe d'une similitude plane directe ;
- ✓ Reconnaitre une similitude plane directe à partir de son écriture complexe ;
- ✓ Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude plane directe à partir de son écriture complexe.
- ✓ Utiliser l'écriture complexe d'une similitude plane directe pour résoudre des problèmes de géométrie.

Prérequis :

- ✓ Nombres complexes ;
- ✓ Transformations usuelles du plan ;

Supports didactiques :

- ✓ CIAM TSM ;
- ✓ Visa Bac ;
- ✓ CIAM Terminale SE ;
- ✓ Nouveau transmath programme 1998 ;
- ✓ Livre de TS2 de M. Saloly Ba ;
- ✓ Cours de TS2 de M. Babacar Djitté ;
- ✓ Cours de TS2 de M. Elimane Bousso ;

Plan du chapitre

I. Définitions

1. **Définition 1**
2. **Définition 2**
3. **Remarque**

II. Ecriture complexe des transformations usuelles du plan

1. **Translation de vecteur**
   a. **Définition**
   b. **Remarque**
   c. **Ecriture complexe**
2. **Homothétie**
   a. **Définition et exemple**
   b. **Ecriture complexe**
   c. **Exemple**
3. **Rotation**
   a. **Définition et exemple**
   b. **Ecriture complexe**
   c. **Exemple**

III. Similitude plane directe

1. **Définition**
2. **Remarque**
3. **Propriétés admises**

4. **Ecriture complexe d'une similitude plane directe**
5. **Image de figures usuelles par une similitude plane directe**

Déroulement du chapitre

Introduction orale

Nous savons que dans le plan complexe, on peut associer à chaque nombre complexe z son image M(z) et réciproquement à tout point M du plan, on peut associer son affixe z_M. Ceci permet d'utiliser les nombres complexes en géométrie. L'objectif de ce chapitre est donc d'utiliser les nombres complexes pour caractériser certaines transformations du plan déjà vues dans les classes précédentes.

NB : Dans tout ce chapitre, P désigne le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

I. Définitions

1. Définition 1

Une transformation du plan P notée f est un procédé qui vérifie les deux conditions suivantes :

- Il permet d'associer à tout point M de P un et un seul point M′ de P dit image de M par f et noté $M' = f(M)$.
- Pour tout point M' de P, il existe un et un seul point M de P qui admet M' comme image par f c'est-à-dire $M' = f(M)$.

Autrement dit une transformation f du plan P est une application f: P→ P qui est bijective.

$$M \mapsto f(M) = M'$$

Exemple

Soit $\vec{u}$ un vecteur donné. Le procédé qui permet d'associer à tout point M de $\mathcal{P}$ un point M' de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ est une transformation du plan $\mathcal{P}$ dite translation de vecteur $\vec{u}$. Elle est noté $t_{\vec{u}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$$M \mapsto t_{\vec{u}}(M) = M' \text{ tel que } \overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

Ainsi $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow M' = t_{\vec{u}}(M)$

2. Définition 2

Soit f une transformation du plan $\mathcal{P}$, M(z) un point et $M'(z')$, l'image de M(z) par f c'est-à-dire $M' = f(M)$. La relation qui exprime z' en fonction de z est dite écriture complexe de la transformation f.

Exemple

Soit $\vec{u}\binom{1}{2}$, $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$, M(z) et $M'(z')$ tel que $M' = t_{\vec{u}}(M)$.

Déterminons l'écriture complexe de $t_{\vec{u}}$ c'est-à-dire exprimons z' en fonction de z.

$M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z' - z = 1 + 2i \Leftrightarrow z' = z + 1 + 2i$. Ainsi la relation $z' = z + 1 + 2i$ est l'écriture complexe de $t_{\vec{u}}$.

3. Remarque

- Souvent, dans l'écriture complexe d'une transformation f, c'est z qui désigne l'affixe d'un point M quelconque et z', l'affixe du point M', image de M par f.
- Un point M est dit invariant par une transformation f si M est sa propre image par f c'est-à-dire si $M = f(M)$. Dans ce cas, $z' = z$ et ainsi pour trouver les points invariants de f s'il existe, on peut remplacer z' par z dans l'écriture complexe de f.

II. Ecritures complexes des transformations usuelles du plan $\mathcal{P}$

1. Translation de vecteur

a. Définition

La translation de vecteur $\vec{u}$ notée $t_{\vec{u}}$ est la transformation du plan $\mathcal{P}$ qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Ainsi pour tout point M , on a :

$M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

b. Remarque

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors tout point M de $\mathcal{P}$ est invariant par $t_{\vec{u}}$. Dans ce cas, on dit que $t_{\vec{u}}$ est la transformation identique du plan $\mathcal{P}$ notée $id_{\mathcal{P}}$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $t_{\vec{u}}$ n'a pas de point invariant.

c. Ecriture complexe d'une translation

Théorème 1 : Si $\vec{u}$ un vecteur d'affixe b, M(z) un point et M'(z') tel que $M' = t_{\vec{u}}(M)$ alors l'écriture complexe de $t_{\vec{u}}$ est $z' = z + b$.

Preuve

$M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z' - z = b \Leftrightarrow z' = z + b$

Exemple : Soit $\vec{u}(1+i)$, M(z) un point et M'(z') tel que $M' = t_{\vec{u}}(M)$. Donnons l'écriture complexe de $t_{\vec{u}}$. L'écriture complexe de $t_{\vec{u}}$ est $z' = z + 1 + i$

Théorème 2 : Si f une transformation de $\mathcal{P}$ dont l'écriture complexe est $z' = z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$ alors $f = t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est d'affixe b.

Preuve

Soit $\vec{u}$ le vecteur d'affixe b.

$z' = z + b \Leftrightarrow z' - z = b \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\vec{u}} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow M' = t_{\vec{u}}(M)$. Ainsi $M' = f(M) = t_{\vec{u}}(M)$ d'où $f = t_{\vec{u}}$.

Exemple : Soit f la transformation du plan $\mathcal{P}$ dont l'écriture complexe est $z' = z + 1 - i$

Déterminons la nature de f. L'écriture complexe de f est de la forme $z' = z + b$ avec $b = 1 - i$ donc f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $b = 1 - i$.

2. Homothétie

a. Définition et exemple: Ω un point du plan $\mathcal{P}$ et k un réel non nul.

L'homothétie de centre Ω et de rapport k notée $h(\Omega, k)$ est la transformation du plan $\mathcal{P}$ qui à tout point M de $\mathcal{P}$ associe le point M' de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. Ainsi pour tout point M de $\mathcal{P}$, on a donc : $M' = h(\Omega, k)(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

b. Remarque

- Si $k = 1$ alors tout point M est invariant par $h(\Omega, k)$. Dans ce cas, $h(\Omega, k) = id_{\mathcal{P}}$
- Si $k \neq 1$ alors Ω est le seul point invariant de $h(\Omega, k)$.

c. Ecriture complexe

Théorème 1 : Si w est l'affixe d'un point Ω, M(z) un point et M'(z') tel que $M' = h(\Omega, k)(M)$ alors l'écriture complexe de $h(\Omega, k)$ est $z' = kz + (1 - k)w$.

Preuve

$M' = h(\Omega, k)(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = z_{k\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow z' - w = k(z - w) \Leftrightarrow$

$z' = kz - kw + w \Leftrightarrow z' = kz + (1 - k)w$

Exemple : Soit Ω $(1 - 3i)$, M(z) un point et M'(z') tel que $M' = h(\Omega, 3)(M)$. Donnons l'écriture complexe de $h(\Omega, 3)$. L'écriture complexe de $h(\Omega, 3)$ est $z' = 3z + (1 - 3)(1 - 3i)$ d'où $z' = 3z - 2 + 6i$

Théorème 2 : Si f est une transformation de $\mathcal{P}$ dont l'écriture complexe est $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ et $b \in \mathbb{C}$ alors f est l'homothétie de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$ et de rapport $k = a$.

Preuve

Cherchons d'abord les points invariants de f. Comme l'écriture complexe de f est $z' = az + b$ alors il suffit de remplacer z' par z dans l'écriture complexe de f.

Ainsi on a : $z = az + b \Leftrightarrow z - az = b \Leftrightarrow (1 - a)z = b \Leftrightarrow z = \frac{b}{1-a}$

Ainsi le point d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$ est le seul point invariant de f. Notons le Ω. Ainsi $z_\Omega = w$

$w = \frac{b}{1-a} \Leftrightarrow b = (1 - a)w$. Ainsi on a :

$z' = az + b \Leftrightarrow z' = az + (1 - a)w \Leftrightarrow z' = az - aw + w \Leftrightarrow z' = a(z - w) + w$

$\Leftrightarrow z' - w = a(z - w) \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = z_{a\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = a\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow M' = h(\Omega, a)(M)$.

Par suite $f(M) = h(\Omega, a)(M)$ d'où $f = h(\Omega, a)$.

Exemple : Déterminons la nature de la transformation f du plan d'écriture complexe $z' = -2z + 2 + i$. L'écriture complexe f est $z' = az + b$ avec $a = -2$ et $b = 2 + i$ donc f est l'homothétie de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a} = \frac{2+i}{1+2} = \frac{2+i}{3}$ et de rapport $k = -2$. Ainsi le centre Ω est de coordonnées $\Omega\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

3. Rotation

a. Définition et exemple: Soit Ω un point et θ un réel.

La rotation de centre Ω et d'angle θ notée $r(\Omega, \theta)$est la transformation de $\mathcal{P}$ qui laisse invariant le point Ω c'est-à-dire $(r(\Omega, \theta)(\Omega) = \Omega)$ et qui à tout point M distinct de Ω associe le point M' tel que : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$. Ainsi pour tout point M du plan P distinct de Ω, on a donc :

$$M' = r(\Omega,\theta)(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M};\ \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

b. Remarque

- Si $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $r(\Omega,\theta) = id_{\mathcal{P}}$
- Si $\theta \neq 0[2\pi]$ alors Ω est le seul point invariant de $r(\Omega,\theta)$.

c. Ecriture complexe d'une rotation

Théorème 1 : Si w est l'affixe d'un point Ω, M(z) un point et M'(z') tel que $M' = r(\Omega,\theta)(M)$ alors l'écriture complexe de $r(\Omega,\theta)$ est $z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})w$.

Preuve

$$M' = r(\Omega,\theta)(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M};\ \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z' - w}{z - w}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z' - w}{z - w}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z' - w}{z - w}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z' - w}{z - w} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z' - w = e^{i\theta}(z - w) \Leftrightarrow z' - w = e^{i\theta}z - e^{i\theta}w \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}z + w - e^{i\theta}w$$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})w$$

Exemple : Soit Ω $(1 + i)$, M(z) un point et M'(z') tel que $M' = r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)(M)$. L'écriture complexe de $r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$ est $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z + (1 - e^{i\frac{\pi}{2}})(1 + i)$. Donc $z' = iz + (1 - i)(1 + i)$ d'où $z' = iz + 2$

Théorème 2 : Si f est une transformation de $\mathcal{P}$ dont l'écriture complexe est $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $|a| = 1$ et $b \in \mathbb{C}$ alors f est la rotation de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$ et d'angle θ où θ est un argument de a.

Preuve

D'après ce qui précède f admet un unique point invariant Ω d'affixe $= \frac{b}{1-a}$. Ainsi $b = (1 - a)w$. Soit θ un argument de a.

Par suite $a = e^{i\theta}$ donc $= (1 - e^{i\theta})w$. On a donc :

$$z' = e^{i\theta}z + \left(1 - e^{i\theta}\right)w \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}z - e^{i\theta}w + w \Leftrightarrow z' - w = e^{i\theta}(z - w)$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'-w}{z-w} = e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'-w}{z-w}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'-w}{z-w}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\,;\,\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\,;\,\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow M' = r(\Omega, \theta)(M)$. Par suite $f(M) = r(\Omega, \theta)(M)$ d'où $f = r(\Omega, \theta)$.

Exemple : Déterminons la nature de la transformation f du plan d'écriture complexe $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + i$. L'écriture complexe de f est $z' = az + b$ avec $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = i$. Donc a est un nombre complexe tel que $a \neq 1$ et $|a| = 1$ d'où f est la rotation de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a} = \frac{i}{1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et d'angle θ avec θ un argument de a donc $\theta = \frac{\pi}{3}$

III. Similitude plane directe

1. Définition : Ω un point du plan P, k un réel strictement positif et θ un réel.

La similitude plane directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ notée $S(\Omega, k, \theta)$ est la transformation du plan $\mathcal{P}$ qui laisse invariant le point Ω et qui à tout point M distinct de Ω, associe le point M' tel que : $\begin{cases} \Omega M' = k\,\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\,\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

Ainsi pour tout point M distinct de Ω, on a donc :

$$M' = S(\Omega, k, \theta)(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\,\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\,\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

2. Remarques

- Si $k = 1$ et $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $S(\Omega, k, \theta) = id_P$
- Si $k = 1$ et $\theta \neq 0[2\pi]$ alors $S(\Omega, k, \theta) = r(\Omega, \theta)$
- Si $k \neq 1$ et $\theta \equiv 0[\pi]$ alors $S(\Omega, k, \theta) = h(\Omega, k)$
- Si $k \neq 1$ et $\theta \neq 0[\pi]$ alors $S(\Omega, k, \theta)$ n'est ni identique, ni une rotation et ni une homothétie et Ω est le seul point invariant de $S(\Omega, k, \theta)$.

3. Propriétés admises

- Si S est une similitude plane directe et si A, B et C sont des points du plan tels que $S(A) = A$ et $S(B) = C$ alors A est le centre de S, $k = \frac{AC}{AB}$ est le rapport de S et θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}})$ est l'angle de S.
- Si S est une similitude plane directe et si A, B, C et D sont des points du plan tels que $S(A) = B$ et $S(C) = D$ alors $k = \frac{BD}{AC}$ est le rapport de S et θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}})$ est l'angle de S.

4. Ecriture complexe d'une similitude plane directe

a. Théorème 1

Si w est l'affixe de Ω, $M(z)$ un point et $M'(z')$ tel que $M' = S(\Omega, k, \theta)(M)$ alors l'écriture complexe de $S(\Omega, k, \theta)$ est $z' = ke^{i\theta}z + (1 - ke^{i\theta})w$

Preuve

$$M' = S(\Omega, k, \theta)(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\,\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}\,; \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = k \\ \arg\left(\dfrac{z' - w}{z - w}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z' - w}{z - w}\right| = k \\ \arg\left(\dfrac{z' - w}{z - w}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z' - w}{z - w} = k\,e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z' - w = k\,e^{i\theta}(z - w) \Leftrightarrow z' - w = ke^{i\theta}z - ke^{i\theta}w$$

$$\Leftrightarrow z' = ke^{i\theta}z + w - k\,e^{i\theta}w \Leftrightarrow z' = ke^{i\theta}z + (1 - k\,e^{i\theta})w$$

Exemple :Soit $\Omega(i)$ Soit $S(\Omega, k, \theta)$, $M(z)$ un point et $M'(z')$ tel que $M' = S\left(\Omega, 3, \frac{\pi}{2}\right)(M)$.
L'écriture complexe de $S\left(\Omega, 3, \frac{\pi}{2}\right)$ est $z' = 3e^{i\frac{\pi}{2}}z + (1 - 3e^{i\frac{\pi}{2}})i$

Donc $z' = 3iz + (1 - 3i)i$ d'où $z' = 3iz + 3 + i$

b. Théorème 2 (admis) : Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

Si f est une transformation du plan $\mathcal{P}$ dont l'écriture complexe est $z' = az + b$ avec $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$ alors f est la similitude plane directe de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$, de rapport $k = |a|$ et d'angle $\theta \equiv \arg(a)[2\pi]$.

Exemple

Soit f une transformation du plan d'écriture complexe $z' = (1+i)z + 2$

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f.

L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $a = 1 + i$ et $b = 2$ donc f est une similitude plane directe. Comme $a = 1 + i$ alors $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = \sqrt{2} \neq 1$ par suite les éléments caractéristiques de f sont son centre Ω d'affixe $w = \frac{2}{1-1-i} = 2i$ de rapport $k = \sqrt{2}$; $\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc l'angle de f est $\theta = \frac{\pi}{4}$.

5. Image de figures usuelles par une similitude plane directe

Si S est une similitude plane directe de rapport k, A, B et I des points du plan et r un réel strictement positif alors :

a. L'image de la droite (AB) par S est la droite (A′B′) avec $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$

b. L'image du cercle (C) de centre I et de rayon r par S est le cercle (C′) de centre $I' = S(I)$ et de rayon $r' = k \times r$.

c. L'image du triangle ABC par S est le triangle A'B'C' avec $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$ et $C' = S(C)$.

CHAPITRE 8 : FONCTION EXPONENTIELLE

Durée : 6h (Cours)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer et utiliser les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ où α est un nombre rationnel strictement positif ;
- ✓ Déterminer les primitives d'une fonction du type $u'(x)e^{u(x)}$.

Prérequis :

- ✓ Fonction ln ;
- ✓ Primitives d'une fonction ;
- ✓ Calculs de limites ;
- ✓ Calculs de dérivées.

Supports didactiques :

- ✓ CIAM TSM ;
- ✓ Visa Bac ;
- ✓ CIAM Terminale SE ;
- ✓ Nouveau transmath programme 1998 ;
- ✓ Livre de TS2 de M. Saloly Ba ;
- ✓ Cours de TS2 de M. Babacar Djitté ;
- ✓ Cours de TS2 de M. Elimane Bousso ;
- ✓ Programme sénégalais.

Plan du chapitre

Déroulement du cours

I. Définition, notation et propriétés

1. Définition et notation

La fonction ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une bijection réciproque définie de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$ dite fonction exponentielle et est notée exp. Ainsi, $exp = ln^{-1}$ et l'ensemble définition de la fonction exponentielle est $\mathbb{R}$. On peut écrire :

exp : $\mathbb{R} \to]0;+\infty[$.

x$\mapsto$exp(x)

2. Remarque

Nous avons vu dans le chapitre sur Ln que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $\ln(e^x) = x\ ln\ e = x$. De plus pour tout $\in \mathbb{R}$, $\ln[\exp(x)] = \ln[\ln^{-1}(x)] = x$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $\ln[\exp(x)] = \ln(e^x)$ d'où $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. On démontre que cette égalité reste valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire : $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Désormais, on écrit e^x au lieu de exp(x) et on lit exponentielle de x ou simplement expo de x.

3. Premières propriétés

- La fonction exponentielle est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$
- Pour tout $x > 0$ alors $e^{\ln x} = x$

- Pour tout $x > 0$ alors $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^{y}$

Exercice d'application

Calculer les nombres suivants : $A = \ln(e^{-2})$; $B = \ln(e^{\sqrt{3}})$; $C = \ln\sqrt{e^{6}}$; $D = e^{\ln 2}$; $E = e^{2\ln 4}$.

4. **Propriétés algébriques :** Soient x et y des nombres réels.

- $e^{0} = 1$ et $e^{1} = e$
- $e^{x+y} = e^{x}e^{y}$ **(Propriété fondamentale).**
- $e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$
- $e^{x-y} = \frac{e^{x}}{e^{y}}$
- $e^{xy} = (e^{x})^{y} = (e^{y})^{x}$

Preuve

- $\ln 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = e^{0}$; $\ln e = 1 \Leftrightarrow e = e^{1}$
- $\ln(e^{x+y}) = x + y$; $\ln(e^{x}e^{y}) = \ln(e^{x}) + \ln(e^{y}) = x + y$. Ainsi on a : $\ln(e^{x+y}) = \ln(e^{x}e^{y})$ d'où $e^{x+y} = e^{x}e^{y}$.
- $e^{-x}e^{x} = e^{-x+x} = e^{0} = 1$ d'où $e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$.
- $e^{x-y} = e^{x+(-y)} = e^{x}e^{-y} = e^{x}\frac{1}{e^{y}} = \frac{e^{x}}{e^{y}}$
- $\ln(e^{xy}) = xy$; $\ln[(e^{x})^{y}] = y\ln(e^{x}) = xy$ donc $\ln(e^{xy}) = \ln[(e^{x})^{y}]$ d'où $e^{xy} = (e^{x})^{y}$.

Exercice d'application

Calculer les nombres suivants : $a = e^{\ln 2+\ln 3}$ et $\mathrm{b} = \mathrm{e}^{-\ln 16} \times \mathrm{e}^{3}$; $c = \frac{\mathrm{e}^{2+\ln 8}}{\mathrm{e}^{3+\ln 4}}$

Simplifier les expressions suivantes : $\mathrm{A}(\mathrm{x}) = \ln(\mathrm{e}^{3\mathrm{x}}) + \ln(3\mathrm{e}^{6\mathrm{x}})$ et $\mathrm{B}(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + (\mathrm{e}^{2\mathrm{x}})^{3}(\mathrm{e}^{-\mathrm{x}})^{5}$

II. Equations et inéquations

Soit a un réel constant donné, $f(x)$ et $g(x)$ des expressions qui dépendent de x.

1. Equations

Pour les équations suivantes, on aura besoin des propriétés suivantes :

a. Propriétés

- Pour tout $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on a : $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$
- Pour tout x, y $\in \mathbb{R}$, $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$.

b. Equations du type $\ln[f(x)] = a$

$$\ln[f(x)] = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ existe} \\ f(x) = e^a \end{cases}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(x - 3) = 2$

c. Equations du type $e^{f(x)} = a$

- ✓ Si $a \leq 0$ alors l'équation n'a pas de solution c'est-à-dire $S = \emptyset$.
- ✓ Si $a > 0$ alors $e^{f(x)} = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ existe} \\ f(x) = \ln a \end{cases}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $e^{2x+1} = -1$ et $e^{3x+1} = 1$

d. Equations du type $e^{f(x)} = e^{g(x)}$

$$e^{f(x)} = e^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ existe} \\ g(x) \text{ existe} \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $e^{\frac{1}{x}} = e^x$

2. Inéquations

Pour résoudre les inéquations suivantes, on aura besoin des propriétés suivantes :

a. Propriétés

- Pour tout $x > 0, y \in \mathbb{R}$, on a $\ln x \leq (\geq) y \Leftrightarrow x \leq (\geq)\ e^y$
- Pour tout x, y $\in \mathbb{R}$, $e^x \leq (\geq) e^y \Leftrightarrow x \leq (\geq) y$

b. Inéquations du type $\ln[f(x)] \leq a$

$$\ln[f(x)] \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ existe} \\ f(x) > 0 \\ f(x) \leq e^a \end{cases}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(-x + 2) \leq -1$

d. Inéquations du type $\ln[f(x)] \geq a$

$\ln[f(x)] \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ existe} \\ f(x) \geq e^a \end{cases}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln(x-1) \geq 3$

e. Inéquations du type $e^{f(x)} \leq a$

- ✓ Si $a \leq 0$ alors l'inéquation n'a pas de solution c'est-à-dire $S = \emptyset$.
- ✓ Si $a > 0$ alors $e^{f(x)} \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ existe \\ f(x) \leq \ln a \end{cases}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $e^{3x+1} \leq -1$ et $e^{3x+1} \leq 2$

f. Inéquations du type $e^{f(x)} \geq a$

- ✓ Si $a \leq 0$ alors $e^{f(x)} \geq a \Leftrightarrow f(x)\ existe$
- ✓ Si $a > 0$ alors $e^{f(x)} \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ existe \\ f(x) \geq \ln a \end{cases}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $e^{\frac{x}{x^2-1}} \geq -1$ et $e^{2x^2+7x+2} \geq e^{-1}$

g. Inéquations du type $e^{f(x)} \leq (\geq)\ e^{g(x)}$

$$e^{f(x)} \leq (\geq)\ e^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ existe} \\ g(x) \text{ existe} \\ f(x) \leq (\geq) g(x) \end{cases}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $e^{x^2} \leq e^{-x+2}$

III. Etude la fonction exponentielle

1. limites aux bornes

$D_{exp} =]-\infty; +\infty[$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

2. Branches infinies

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à C_{exp} en $-\infty$.

- Nous admettons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Ainsi C_{exp} admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$.

3. Dérivée

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\exp)'(x) = (ln^{-1})'(x) = \frac{1}{(\ln)'[ln^{-1}(x)]} = \frac{1}{(\ln)'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$. Par suite $(\exp)'(x) = e^x$.

4. Tableau de variation

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et son tableau de variations est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
$\exp$	0 ↗	$+\infty$

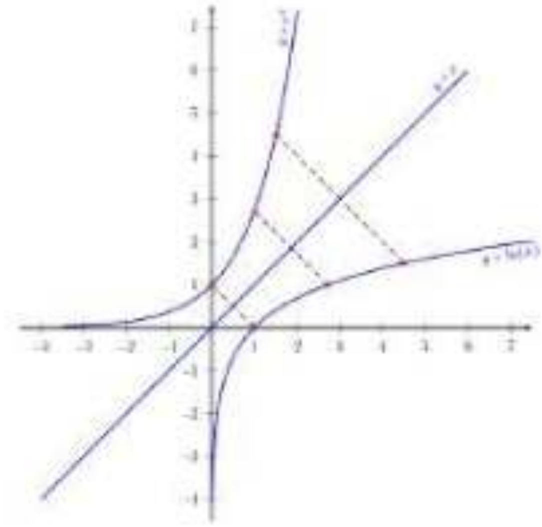
5. Courbe représentative de la fonction exponentielle (C_{exp})

C_{exp} et C_{ln} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ donc C_{exp} peut s'obtenir à partir de C_{ln}.

Rappel :

x	1	e	4	5	6
ln x	0	1	1,4	1,6	1,8

$(ln)'(1) = 1$ et $(ln)'(e) = \frac{1}{e} \approx 0{,}4$



Courbe de la fonction ln et $expo$

6. Limites usuelles

- Si α est un nombre rationnel strictement positif alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$
- Si n est un entier naturel alors $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$. En particulier $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Exercice d'application

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + x)\, e^x$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$

IV. Fonction définie par $e^{u(x)}$

Soient u et f sont des fonctions telles que $f(x) = e^{u(x)}$. On a : $f(x) = (\exp \circ u)(x)$

1. Ensemble de définition de f

$f(x)$ existe ssi $u(x)$ existe. Ainsi, $D_f = D_u$

Exemple

Déterminer D_f dans chacun des cas suivants

- $f(x) = e^{2x-1}$
- $f(x) = e^{\frac{3x+1}{-2x+3}}$

2. Limites de $f(x)$

Soient a et l ∈ ℝ ou a et l désignent ∞ ; l'∈ [0; +∞[ou l'=+∞

Si $\lim_{x\to a} u(x) = l$ et si $\lim_{x\to l} e^x = l'$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = l'$

Exemple

Calculons les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 2} e^{-x+2}$
2. $\lim_{x\to +\infty} e^{-x+1}$
3. $\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{x^3+1}{x}}$

3. Dérivée de $f(x)$

Si u est dérivable sur un intervalle I alors f est dérivable sur I et pour tout x ∈ I, $f'(x) = (\exp \circ u)'(x) = u'(x).(\exp)'[u(x)] = u'(x)e^{u(x)}$. Ainsi $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Exemple : $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

Justifions que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calculons $f'(x)$.

Conséquence

Si u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction F définie par $F(x) = e^{u(x)}$ est une primitive sur I de la fonction définie par $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Exemple

$f(x) = (2x-1)e^{x^2-x+1}$. Déterminons une primitive de f sur ℝ

V. Fonction puissance

1. Définition : Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$

La fonction puissance d'exposant α est la fonction f définie par : $f:]0; +\infty[\to]0; +\infty[$
$x \mapsto f(x) = x^\alpha$.

2. Remarque

Si $\alpha = 0$ alors $f(x) = x^\alpha = 1$ donc la fonction puissance d'exposant nul est la fonction constante égale à 1. Ainsi, dans tout ce qui suit, on suppose que $\alpha \neq 0$.

3. Propriété

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a: $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Ainsi, la fonction puissance d'exposant α est la composée de la fonction $x \mapsto \alpha \ln x$ par la fonction exponentielle.

Preuve

Comme $x > 0$ donc $x^\alpha > 0$ d'où $x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$. Ainsi la fonction puissance d'exposant α, f est telle que : $f(x) = e^{\alpha \ln x}$. Par conséquent, f est la composée de la fonction $x \mapsto \alpha \ln x$ par la fonction exponentielle.

4. Conséquences de la propriété

a. Limites de la fonction puissance aux bornes de son ensemble définition

Si $\alpha < 0$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0^+ \end{cases}$

Si $\alpha > 0$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty \end{cases}$

b. Dérivée et sens de variation de la fonction puissance

f, la fonction puissance d'exposant α est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$. De plus :

- Si $\alpha < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
- Si $\alpha > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

CHAPITRE 9 : SUITES NUMERIQUES

Durée : 12h (Cours)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Utiliser la notation indicielle ;
- ✓ Déterminer les termes d'une suite récurrente ;
- ✓ Démontrer qu'une suite est monotone ;

- ✓ Représenter graphiquement une suite ;
- ✓ Majorer ou minorer une suite ;
- ✓ Restituer la définition de suites arithmétiques et géométriques ;
- ✓ Calculer la somme des p termes consécutifs d'une suite arithmétique et géométrique ;
- ✓ Utiliser la notation $\sum$;
- ✓ Restituer et utiliser les théorèmes sur la convergence des suites monotones bornées ;
- ✓ Déterminer la limite d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue ;

Prérequis :

- ✓ Fonction numériques ;
- ✓ Calculs de limites ;
- ✓ Continuité.

Supports didactiques :

- ✓ CIAM TSM ;
- ✓ Visa Bac ;
- ✓ CIAM Terminale SE ;
- ✓ Nouveau transmath programme 1998 ;
- ✓ Livre de TS2 de M. Saloly Ba ;
- ✓ Cours de TS2 de M. Babacar Djitté ;
- ✓ Cours de TS2 de M. Elimane Bousso ;
- ✓ Programme sénégalais.

Plan du chapitre

I. Généralités sur les suites numériques

1. Définition

a. Notation fonctionnelle d'une suite numérique

- ✓ **Exemples**

b. Notation indicielle d'une suite numérique

- ✓ **Exemples**

c. Remarque

2. Types de suites numériques

a. Suite définie par une formule explicite

- ✓ **Exemple**

b. Suite définie par une formule de récurrence

Déroulement du cours

Dans tout le chapitre, E désigne ℕ ou bien un sous-ensemble de ℕ.

I. Généralités sur les suites numériques

1. Définition

On appelle suite numérique toute application de E dans $\mathbb{R}$.

a. Notation fonctionnelle d'une suite numérique

D'habitude une application est nommée par les lettres f ou g ou h…. et sa variable est souvent notée x mais pour une suite numérique, on utilisera plutôt les lettres u ou v ou w…. et sa variable sera notée n. Ainsi si u est une suite numérique définie sur E alors sa notation fonctionnelle est $\mathrm{u}: \mathrm{E} \to \mathbb{R}$.

$$\mathrm{n} \mapsto \mathrm{u}(\mathrm{n})$$

✓ **Exemples**

- L'application $\mathrm{u}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une suite numérique

$$\mathrm{n} \mapsto \mathrm{u}(\mathrm{n}) = 2\mathrm{n} - 4$$

- L'application $\mathrm{v}: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ est une suite numérique

$$\mathrm{n} \mapsto \mathrm{v}(\mathrm{n}) = \frac{1}{\mathrm{n}}$$

b. Notation indicielle d'une suite numérique

Soit $\mathrm{u}: \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une suite numérique.

$$n \mapsto u(n)$$

- $u(n)$, l'image d'un élément n de E par u est notée u_n et est dite terme d'indice n ou terme général de la suite u.
- Comme E est une partie de $\mathbb{N}$ alors E admet un plus petit élément n_0 et dans ce cas, u_{n_0} est dit premier terme de la suite u.
- La suite $\mathrm{u}: \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ est alors notée $(u_n)_{n \in \mathrm{E}}$ et cette notation est dite notation indicielle.

$$n \mapsto u(n).$$

✓ **Exemples**

La notation indicielle de la suite $\mathrm{u}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_n = 2n - 4$

$$\mathrm{n} \mapsto \mathrm{u}(\mathrm{n}) = 2\mathrm{n} - 4$$

✓ Le premier terme de la suite $(\mathrm{u}_\mathrm{n})_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ est $u_0 = -4$.

- ✓ Le deuxième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_1 = -2$

La notation indicielle de la suite $v : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ est $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $v_n = \frac{1}{n}$.

$$n \mapsto v(n) = \frac{1}{n}$$

- ✓ Le premier terme de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $v_1 = 1$
- ✓ Le deuxième terme est $v_2 = \frac{1}{2}$.

c. Remarque

- Pour une suite numérique, on adopte la notation indicielle au détriment de la notation fonctionnelle.
- Il ne faut pas confondre $(u_n)_{n\in E}$ qui est une application et u_n, un terme général de la suite qui est un nombre réel.
- Deux termes d'une suite numérique $(u_n)_{n\in E}$ sont dits consécutifs si leurs indices sont des entiers naturels consécutifs. C'est le cas pour u_n et u_{n+1}.

2. Types de suite numérique

a. Suite définie par une formule explicite

Une suite numérique $(u_n)_{n\in E}$ est dite définie par une formule explicite s'il existe une fonction numérique f telle que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in E$. Dans ce cas, si la valeur de n est connue alors, celle de u_n peut être directement connue.

✓ **Exemple**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_n = 3n - 5$ est une suite définie par une formule explicite. En effet : soit f, la fonction numérique $x \mapsto 3x - 5$. On a alors $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculons les termes u_0, u_5 et u_{2022}.

b. Définir une suite par une formule de récurrence

Une suite numérique $(u_n)_{n\in E}$ dont la valeur de son premier terme est donnée et telle qu'il existe une fonction numérique f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in E$ est dite suite définie par une formule de récurrence. Dans le cas, la valeur d'un terme de la suite ne peut être connue que si les valeurs de tous les termes qui le précédent sont d'abord connues.

✓ **Exemple**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$ est une suite définie par une formule de récurrence. En effet, la valeur de son 1^er terme u_0 est donnée et en posant f, la fonction numérique $x \mapsto f(x) = 3x + 2$ alors $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculer les 4 premiers termes de la suite.

Exercice à faire à la maison

Calculer u_6

3. Monotonie ou sens de variation d'une suite

a. Théorème

- Une suite $(u_n)_{n\in E}$ est croissante si et seulement si pour tout n ∈ E, on a : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ (autrement dit $u_{n+1} \geq u_n$).
- Une suite $(u_n)_{n\in E}$ est décroissante si et seulement si pour tout n ∈ E, on a $u_{n+1} - u_n \leq 0$ (autrement dit $u_{n+1} \leq u_n$).
- Une suite $(u_n)_{n\in E}$ est constante si et seulement si pour tout n ∈ E, on a : $u_{n+1} - u_n = 0$ (autrement dit $u_{n+1} = u_n$).

b. Remarque

- Dans le 1^er et le 2^nd cas du théorème, si les inégalités sont strictes alors on dit respectivement que $(u_n)_{n\in E}$ est strictement croissante ou strictement décroissante.
- Une suite $(u_n)_{n\in E}$ est monotone (respectivement strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante).

c. Exemple : Etudions le sens de variation de la suite définie ci-dessous

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathrm{u_n} = -\mathrm{n}^2 + \mathrm{n} - 2$

d. Propriété

Soit f une fonction numérique, $p \in \mathbb{N}$ donné et $(u_n)_{n\geq p}$ une suite telle que $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq p$. Si f est monotone sur $[\mathrm{p}; +\infty[$ alors $(u_n)_{n\geq p}$ l'est aussi et a les mêmes variations que f sur $[\mathrm{p}; +\infty[$.

Exercice d'application : Etudions le sens de variation de la suite définie ci-dessous :

$(\mathrm{u_n})_{n\geq 1}$ telle que $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

4. Suite majorée ; suite minorée et suite bornée

a. Définitions

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathrm{E}}$ est dite majorée sur E s'il existe un réel constant M tel que pour tout $n \in E$, on a : $u_n \leq M$. Dans ce cas le réel M est dit majorant de la suite.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathrm{E}}$ est dite minorée sur E s'il existe un réel constant m tel que pour tout $n \in E$, on a : $u_n \geq m$. Dans ce cas le réel m est dit minorant de la suite.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathrm{E}}$ est dite bornée sur E si elle est à la fois majorée et minorée sur E.

b. Remarques

- Toute suite croissante $(u_n)_{n\in\mathrm{E}}$ est minorée sur E par son premier terme. C'est-à-dire si u_{n_0} est son 1er terme alors pour tout $n \in \mathrm{E}$, $u_n \geq u_{n_0}$.
- Toute suite décroissante $(u_n)_{n\in\mathrm{E}}$ est majorée par son premier terme. C'est-à-dire si u_{n_0} est son 1er terme alors pour tout $n \in \mathrm{E}$, $u_n \leq u_{n_0}$.

c. **Exercice d'application :** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_n = \frac{3n+4}{n+3}$

1. En utilisant une décomposition de $\frac{3n+4}{n+3}$, montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée.
2. Etudier montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone. En déduire qu'elle est minorée.
3. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

5. Représentation graphique dans le plan de termes d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction numérique, $(\mathrm{u_n})_{n\in\mathrm{E}}$ une suite définie par la donnée de son 1er terme telle que $\mathrm{u_{n+1}} = f(\mathrm{u_n})$ pour tout $\mathrm{n} \in \mathrm{E}$. L'objectif est de représenter certains termes de cette suite sur les axes (O,I) et (O,J) d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\mathrm{I},\mathrm{J})$ sans même connaitre les valeurs de ces termes.

Exemple : On considère la suite $(\mathrm{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} \mathrm{u_0} = \frac{1}{2} \\ \mathrm{u_{n+1}} = 2\mathrm{u_n} + 1 \end{cases}$

Sans les calculer, représentons sur les axes (O,I) et (O,J) d' repère orthonormé $(\mathrm{O},\mathrm{I},\mathrm{J})$, les 3 premiers termes de la suite $(\mathrm{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

On remarque pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 2x + 1$. Pour ce, on trace $(\Delta): y = x$ puis C_f dans (O, I, J). La suite se fera graphiquement.

6. Démonstration par récurrence

La démonstration (raisonnement) par récurrence est une méthode de démonstration que l'on peut utiliser pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ où n_0 est un entier naturel donné.

a. Principe de la démonstration par récurrence

La démonstration par récurrence se fait en 4 étapes :

- **1ère étape** : Vérifier que la propriété est vrai pour $n = n_0$. Cette étape est dite initialisation.
- **2ème étape** : Supposer que la propriété est vrai pour un entier n tel que $n > n_0$. Cette étape est dite hypothèse de récurrence.
- **3ème étape** : Montrer que la propriété est vrai pour l'entier suivant n c'est à dire $n + 1$. Cette étape est souvent dite hérédité.
- **4ème étape** : Affirmer que la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$. Cette étape est dite conclusion.

b. Exemple

On pose $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

II. Suites arithmétiques ; suites géométriques

1. Suites arithmétiques

a. Définition

Une suite $(u_n)_{n \in E}$ est dite arithmétique s'il existe un réel constant souvent noté r tel que pour tout $n \in E$, $u_{n+1} - u_n = r$ (i.e $u_{n+1} = u_n + r$). Autrement dit, la différence entre deux termes consécutifs quelconques de $(u_n)_{n \in E}$ est égale à un réel constant r. Dans ce cas le réel r est dit raison de la suite arithmétique.

b. Exemple

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = -2n + 5$ est arithmétique de raison -2. En effet pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -2(n + 1) + 5 - (-2n + 5) = -2$.

c. Remarque

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r alors chaque terme est obtenu en ajoutant la raison r au terme précédent i.e : $u_1 = u_0 + r;\ u_2 = u_1 + r;\ u_3 = u_2 + r; \dots ; u_{n+1} = u_n + r$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison nulle si et seulement si elle est constante.

d. Monotonie d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in E}$ une suite arithmétique de raison r, on a :

- ✓ Si $r > 0$ alors $(u_n)_{n\in E}$ est strictement croissante sur E.
- ✓ Si $r < 0$ alors $(u_n)_{n\in E}$ est strictement décroissante sur E.

e. Expression du terme général d'une suite arithmétique

- **Théorème 1**

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r alors pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + rn$.

Preuve : Soit$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + rn$.

- ❖ $u_0 = u_0 + r(0)$ donc la propriété est vrai pour $n = 0$.
- ❖ Supposons qu'elle est vraie pour un entier $n > 0$ c'est-à-dire supposons que $u_n = u_0 + rn$
- ❖ Montrons qu'elle est vrai pour $n + 1$ c'est-à-dire $u_{n+1} = u_0 + r(n + 1)$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r alors $u_{n+1} = u_n + r$ or d'après l'hypothèse de récurrence on a : $u_n = u_0 + rn$ d'où $u_{n+1} = u_0 + rn + r = u_0 + r(n + 1)$.

- ❖ Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + rn$.

- **Théorème 2**

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et u_p est un terme quelconque alors pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = u_p + r(n - p)$.

Preuve :

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r alors d'après le théorème 1, on a : $u_n = u_0 + rn$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $u_p = u_0 + rp$. Par suite $u_n - u_p = u_0 + rn - (u_0 + rp) = r(n - p)$ d'où $u_n = u_p + r(n - p)$.

- **Exercice d'application**

Dans chaque cas suivant, donner l'expression du terme général de la suite :

1. $(\mathrm{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$ telle que $u_0 = -3$. Calculer u_{100} puis donner l'expression du terme général $\mathrm{u_n}$ en fonction de n.
2. $(\mathrm{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = -3$ telle que $u_5 = -11$. Calculer u_3 puis donner l'expression du terme général $\mathrm{u_n}$ en fonction de n.

f. Progression arithmétique

- **Définition**

Trois nombres réels a, b et c dans cet ordre sont en progression arithmétique si $a + c = 2b$ $(i.e\ \mathrm{b} = \frac{a+c}{2})$.

- **Propriété**

Si $(\mathrm{u_n})_{n\in E}$ est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in E$, $\mathrm{u_n}, \mathrm{u_{n+1}}$ et $\mathrm{u_{n+2}}$ dans cet ordre sont en progression arithmétique.

Preuve : Soit $n \in E$, $\mathrm{u_n}, \mathrm{u_{n+1}}$ et $\mathrm{u_{n+2}}$.

$\mathrm{u_{n+2}} = \mathrm{u_{n+1}} + r$ donc $\mathrm{u_n} + \mathrm{u_{n+2}} = \mathrm{u_n} + \mathrm{u_{n+1}} + r$ or $u_n + r = \mathrm{u_{n+1}}$ donc $\mathrm{u_n} + \mathrm{u_{n+2}} = 2\mathrm{u_{n+1}}$

g. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

- **Notation**

Soient $(\mathrm{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, la somme $\mathrm{u_0} + \mathrm{u_1} + \cdots + \mathrm{u_{n-1}}$ de termes consécutifs de la suite $(\mathrm{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ peut être notée par $\mathrm{u_0} + \mathrm{u_1} + \cdots + \mathrm{u_{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. On lit : « Sigma k allant de 0 à n-1 de u_k».

Exercice d'application

1. Ecrire la somme $\mathrm{v_5} + \mathrm{v_6} + \cdots + \mathrm{v_{2022}}$ en utilisant le symbole $\sum$.
2. Ecrire $\sum_{i=1}^{n} u_i$ comme une somme de termes.

- **Propriété**

Une somme notée S de termes consécutifs d'une suite arithmétique est calculée par la formule :

$S = \frac{\text{nombre de termes de S} \times (1^{\text{er}} \text{ terme de S} + \text{dernier terme de S})}{2}$ où le nombre de termes de S = (indice du dernier terme - indice du 1$^{\text{er}}$ terme)+1

- **Exercice d'application**

La suite $(\mathrm{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{u_n} = 3n + 5$ est arithmétique de raison 3.

Calculer S $=\sum_{k=0}^{9} u_k$.

2. Suites géométriques

a. Définition

Une suite $(\mathrm{u_n})_{n\in E}$ est dite géométrique s'il existe un réel constant souvent noté q tel que pour tout n $\in$ E, $\mathrm{u_{n+1}} = \mathrm{q\ u_n}$. Dans ce cas le réel q est dit raison de la suite géométrique.

b. Exemple

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = 3^n$ est géométrique de raison 3.

c. Remarque

- Si $(\mathrm{u_n})_{n\in E}$ est une suite géométrique de raison $q = 0$ alors $(\mathrm{u_n})_{n\in E}$ est la suite nulle i.e $\mathrm{u_n} = 0$ pour tout n $\in$ E.
- $(\mathrm{u_n})_{n\in E}$ est une suite géométrique de raison $q = 1$ ssi $(\mathrm{u_n})_{n\in E}$ est une suite constante.

Dans la suite, lorsqu'on a une suite géométrique, on suppose que la raison $q \neq 0$ et $q \neq 1$.

- Si $(\mathrm{u_n})_{n\in E}$ est une suite géométrique de raison q alors chaque terme est obtenu en multipliant par la raison q le terme précédent c'est-à-dire : $u_1 = q\,u_0$; $u_2 = q\,u_1$; $u_3 = q\,u_2$; … ; $u_{n+1} = q\,u_n$.

d. Monotonie d'une suite géométrique

Soit $(\mathrm{u_n})_{n\in E}$ est suite géométrique de raison q et de premier terme u_p.

- ✓ Si $q < 0$ alors $(\mathrm{u_n})_{n\in E}$ n'est pas monotone c'est-à-dire ni croissante ni décroissante.
- ✓ Si $q > 0$ alors $(\mathrm{u_n})_{n\in E}$ est monotone. De plus on a :
  - ❖ Si $0 < q < 1$ et $u_p > 0$ alors la suite $(\mathrm{u_n})_{n\in E}$ est strictement décroissante.
  - ❖ Si $0 < q < 1$ et $u_p < 0$ alors la suite $(\mathrm{u_n})_{n\in E}$ est strictement croissante.
  - ❖ Si $q > 1$ et $u_p > 0$ alors la suite $(\mathrm{u_n})_{n\in E}$ est strictement croissante.
  - ❖ Si $q > 1$ et $u_p < 0$ alors la suite $(\mathrm{u_n})_{n\in E}$ est strictement décroissante.

e. Expression du terme général d'une suite géométrique

- **Théorème 1**

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q alors pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0\, q^n$.

Preuve : Soit$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0\, q^n$.

- ❖ $u_0 = u_0 q^0$ donc la propriété est vrai pour $n = 0$.
- ❖ Supposons qu'elle est vraie pour un entier $n > 0$ c'est-à-dire supposons que $u_n = u_0\, q^n$
- ❖ Montrons qu'elle est vrai pour $n + 1$ c'est-à-dire $u_{n+1} = u_0\, q^{n+1}$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q alors $u_{n+1} = q\, u_n$ or d'après l'hypothèse de récurrence on a : $u_n = u_0\, q^n$ d'où $u_{n+1} = q(u_0\, q^n) = u_0\, q^{n+1}$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0\, q^n$.

- **Théorème 2 :** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et si u_p est un terme quelconque alors pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_p\, q^{n-p}$.

Preuve : Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q alors d'après le théorème 1, on a : $u_n = u_0\, q^n = u_0\, q^{n-p+p} = u_0\, q^p \times q^{n-p} = u_p\, q^{n-p}$ car $u_p = u_0\, q^p$.

- **Exercice d'application :** Dans chaque cas l'expression du terme général de la suite
  1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$
  2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = -3$ telle que $u_5 = 2$

f. Progression géométrique

- **Définition**

Trois nombres réels a, b et c pris dans cet ordre sont en progression géométrique si $ac = b^2$.

- **Propriété**

Si $(u_n)_{n\in E}$ est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in E$, u_n, u_{n+1} et u_{n+2} dans cet ordre sont en progression géométrique.

Preuve : Soit $n \in E, u_n, u_{n+1}$ et u_{n+2}.

$u_{n+2} = q\, u_{n+1}$ donc $u_n.u_{n+2} = q\, u_n u_{n+1}$ or $q\, u_n = u_{n+1}$ donc $u_n.u_{n+2} = {u_{n+1}}^2$

g. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

- **Propriété**

Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Preuve

Supposons que $q \neq 0$ et $q \neq 1$ et posons $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$

Ainsi $qS = q + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}$ donc

On a : $S - qS = 1 - q^{n+1}$ donc $S(1-q) = 1 - q^{n+1}$ d'où $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

- **Conséquence**

Une somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q est calculée par la formule : $\mathrm{S} = \frac{1^{er} \text{ terme de S} \times (1-q^{nbr\ de\ termes\ de\ S})}{1-q}$.

- **Exercice d'application**

La suite $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{u_n} = 3^n$ est une suite géométrique de raison 3 .

Calculer $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{9} u_k$

III. Limite d'une suite numérique

La notion de limite déjà vue à propos des fonctions numériques, s'étend au cas des suites numériques mais pour ces dernières, la notion de limite ne sera définie que lorsque n tend vers $+\infty$.

Tous les résultats vus sur les limites en $+\infty$ des fonctions restent valables avec les suites numériques.

1. Définitions

- Une suite numérique $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n}\in\mathrm{E}}$ est dite convergente si elle admet une limite et si cette limite est un nombre réel.
- Une suite numérique $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n}\in\mathrm{E}}$ est dite divergente si elle n'admet pas de limite ou si sa limite est infinie.
- Etudier la convergence d'une suite, c'est étudier si elle est convergente ou divergente.

2. **Exemple :** Etudions les limites des suites $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{v_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ telles que $\mathrm{u_n} = n\, e^{-n+1}$ et $\mathrm{v_n} = \frac{\ln(1+n)}{n}$

3. Limites d'une suite géométrique

a. Théorème : Soit q un réel tel que $q \neq 1$.

- ✓ Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$
- ✓ Si $q > 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- ✓ Si $q \leq -1$ alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de q^n n'existe pas.

b. Conséquence

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_P.

- ✓ Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. Dans ce cas, $(u_n)_{n \in E}$ est convergente.
- ✓ Si $q > 1$ alors on a : $\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \; si \; u_P > 0 \\ \lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \; si \; u_P < 0 \end{cases}$. Dans ce cas, $(u_n)_{n \in E}$ est divergente.
- ✓ Si $q \leq -1$ alors la suite $(u_n)_{n \in E}$ n'admet pas de limite et est donc divergente.

4. Théorèmes (admis)

Soient $(u_n)_{n \in E}$, $(v_n)_{n \in E}$ et $(w_n)_{n \in E}$ des suites et f une fonction numérique.

a. Théorème 1

Si $(u_n)_{n \in E}$ est une suite croissante et majorée sur E alors $(u_n)_{n \in E}$ est convergente.

b. Théorème 2

Si $(u_n)_{n \in E}$ est une suite décroissante et minorée sur E alors $(u_n)_{n \in E}$ est convergente.

c. Théorème 3 (Théorème des gendarmes ou du Sandwich)

Si pour tout $n \in E, v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ ou $l = \infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$. En particulier, s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in E, |u_n - l| \leq v_n$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$

d. Théorème 4

- ✓ Si pour tout $n \in E$, $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- ✓ Si pour tout $n \in E$, $u_n \geq v_n$ et si $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- ✓ Si pour tout $n \in E$, $u_n > 0$ et si la suite $(u_n)_{n \in E}$ converge vers l alors $l \geq 0$.
- ✓ Si pour tout $n \in E$, $u_n < 0$ et si la suite $(u_n)_{n \in E}$ converge vers l alors $l \leq 0$.

e. Théorème 5

Soit $(u_n)_{n\in E}$ une suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite $(u_n)_{n\in E}$ est convergente et f est continue alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ où l est solution de l'équation $f(x) = x$.

f. Théorème 6

Soient $(u_n)_{n\in E}$ et $(v_n)_{n\in E}$ des suites telles que $v_n = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in E}$ converge vers l et f continue en l alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(l)$.

CHAPITRE 10 : DENOMBREMENT

Durée : 8h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer le vocabulaire : ensemble fini, cardinal d'un ensemble, produit cartésien, p-liste, arrangement, permutation et combinaison;
- ✓ Dénombrer en utilisant des représentations ;
- ✓ Restituer les formules des p-listes, arrangements et combinaisons ;
- ✓ Utiliser les formules des p-listes, arrangements et combinaisons ;
- ✓ Restituer les notations n !, A_p^n et C_p^n ;
- ✓ Modéliser des situations concrètes pour résoudre des problèmes de dénombrement ;
- ✓ Utiliser la formule du binôme de Newton.

Prérequis :

- ✓ Théories des ensembles ;

Supports didactiques : ;

- ✓ Document de Faye-Ka ;
- ✓ Ordinateur.

Plan de la leçon

I. Notions élémentaires sur les ensembles

1. Notion d'ensemble

a. Exemple

b. Remarque

2. Représentations d'un ensemble

f. **Formule du binôme de Newton**

Application

CHAPITRE 10 : DENOMBREMENT

De quel verbe vient le mot dénombrement ?

Réponse : Il vient du verbe dénombrer.

Que signifie le verbe dénombrer ?

Réponse : C'est déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble.

INTRODUCTION : Le dénombrement est un chapitre qui doit être traité en classe de première dans le programme de mathématiques du Sénégal. Mais compte tenu des perturbations chroniques et du volume du programme de mathématiques, rares sont les professeurs qui arrivent à le traiter en première.

L'objectif de cette leçon est de donner des outils pour déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble. Parfois, cette tâche peut s'avérer assez délicate par exemple si on veut connaitre le nombre de mots ayant un sens ou non de cinq lettres distinctes ou non que l'on puisse former avec les lettres de l'alphabet français alors il est quasiment impossible d'écrire tous ces mots puis de les compter. Ainsi, tout au long de ce chapitre, nous mettrons en place des outils pour répondre à une telle question et bien d'autres. Nous allons commencer par donner quelques compléments sur les ensembles.

I. Notions élémentaires sur les ensembles

1. Notion d'ensemble

Si on collectionne des objets quelconques (de même nature ou non) que l'on peut distinguer deux à deux par un critère alors on définit un ensemble. Chaque objet d'un ensemble est appelé élément de l'ensemble.

Un ensemble est souvent noté par une lettre majuscule tandis qu'un élément de cet ensemble est noté par une lettre minuscule.

a. Exemple

Notons E, l'ensemble des lettres minuscules du mot «Astou». Les éléments de E sont : a ; s ; t ; o et u.

a est un élément de E : on écrit $a \in E$.

b n'est pas un élément de E : on écrit $b \notin E$.

b. Remarque

Par convention un ensemble qui ne contient aucun élément est appelé ensemble vide et est noté $\emptyset$. Par exemple : l'ensemble des élèves de la TS2 de Ndondol de l'année 2022 ayant pour nom de famille FALL est l'ensemble vide.

2. Représentations d'un ensemble

- ✓ La représentation suivante : $E = \{a; s; t; o; u\}$ est dite écriture en extension de l'ensemble E des lettres minuscules du mot « astou». Dans une écriture en extension d'un ensemble, les éléments de l'ensemble sont mis entre crochets et dans n'importe quel ordre. Donc $E = \{t; a; u; s; o\} = \{a; u; t; o; s\} = \cdots$
- ✓ La représentation suivante est dite diagramme de Venn de l'ensemble $E = \{a; s; t; o; u\}$.

3. Parties d'un ensemble

a. Définition et exemple

Un ensemble A est une partie (ou un sous-ensemble) d'un ensemble E si tous les éléments de A sont aussi des éléments de E. Dans ce cas, on note $A \subset E$ et on lit A est inclus (ou est contenu) dans E. Par exemple l'ensemble $A = \{s; t; u\}$ est une partie de $E = \{a; s; t; o; u\}$. on écrit $A \subset E$.

b. Remarque

- Par convention l'ensemble vide est une partie de n'importe quel ensemble E. On a donc $\emptyset \subset E$ pour tout ensemble E.
- Tout ensemble E est une partie de lui-même. On a donc $E \subset E$.

c. Ensemble des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. L'ensemble dont les éléments sont les différentes parties de E est dit ensemble des parties de E et est noté $\mathcal{P}(E)$. Par exemple pour $E = \{1; a; t\}$, une écriture en extension de $\mathcal{P}(E)$ est $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{a\}, \{t\}, \{1, a\}, \{1, t\}, \{a, t\}, \{1, a, t\}\}$.

d. Intersection et réunion :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

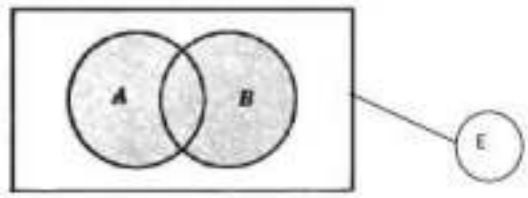
✓ **Intersection de deux ensembles**

L'intersection de A et B est la partie de E notée $A \cap B$ (on lit A inter B) dont les éléments appartiennent à la fois à A et à B.

NB : Si A et B n'ont aucun élément commun alors $A \cap B = \emptyset$ et on dit que A et B sont disjoints.

✓ **Réunion de deux ensembles**

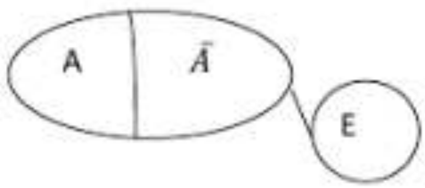
La réunion de A et B est la partie de E notée $A \cup B$ (on lit A union B), dont les éléments appartient à A seulement ou bien à B seulement ou bien à $A \cap B$.



$A \cup B$ est représenté par la partie grise.

e. Complémentaire d'une partie d'un ensemble

Définition : Le complémentaire de A dans E est la partie de E notée $\overline{A}$ (on lit A barre) dont les éléments sont ceux de E qui ne sont pas dans A.



Exemple : Si E désigne l'ensemble des professeurs du lycée de Ndondol et A l'ensemble des professeurs mariés dudit lycée alors $\overline{A}$ le complémentaire de A est l'ensemble des professeurs célibataires.

Remarque

$A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = E$ (Autrement dit chaque élément de E est ou bien dans A seulement ou bien dans $\overline{A}$ seulement).

4. Partition d'un ensemble :

Soient $A_1, A_2, A_3, \dots$ et A_p des parties non vides d'un ensemble E.

a. Définition

Les parties $A_1, A_2, A_3, \dots$ et A_p forment une partition de E si :

- les parties $A_1, A_2, A_3, \dots$ et A_p sont deux à deux disjointes.
- la réunion des parties $A_1, A_2, A_3, \dots A_p$ donne E c'est-à-dire $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_p = E$. Autrement dit chaque élément de E est ou bien dans A_1 seulement ou bien dans A_2 seulement… ou bien dans A_p seulement.

b. Exemple

Soit E, l'ensemble des élèves de terminale en 2022 du lycée de Ndondol ; A_1, l'ensemble des élèves de la TS2 ; A_2, l'ensemble des élèves de la TL' ; A_3, l'ensemble des élèves de la TL2 A et A_4, l'ensemble des élèves de la TL2B et A_5, l'ensemble des élèves de la TL2 C.

Les ensembles $A_1; A_2; A_3; A_4$ et A_5 sont des parties de E et ils forment une partition de E.

c. Remarque

Si A est une partie non vide d'un ensemble E alors A et $\overline{A}$ forment une partition de E.

II. Ensemble fini

Un ensemble E est fini lorsqu'on peut déterminer le nombre de ses éléments. Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé le cardinal de E et est noté card (E).

NB : Dans la suite tous les ensembles considérés sont des ensembles non vides et sont finis.

1. Le cardinal de la réunion

a. Principe additif

Si A et B sont des ensembles disjoints ($A \cap B = \emptyset$) alors $\mathbf{card(A \cup B) = card(A) + card(B)}$.

Cette propriété est dite principe additif.

b. Généralisation du principe additif

Si $A_1, A_2, \dots.$ et A_p sont des ensembles 2 à 2 disjoints alors :

$$\mathbf{card}\left(\mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2} \cup \dots \cup \mathbf{A_p}\right) = \mathbf{card}(\mathbf{A_1}) + \mathbf{card}(\mathbf{A_2}) + \cdots + \mathbf{card}\left(\mathbf{A_p}\right)$$

Dans la pratique, le principe additif s'applique sous la forme équivalente suivante :

Si une tâche peut s'effectuer en plusieurs actions deux à deux disjointes alors le nombre de façons d'effectuer cette tâche est égale à la somme des nombres de façons d'effectuer chacune de ces actions.

c. Conséquence du principe additif

- Si A est une partie de E alors $\mathbf{card}(\mathrm{E}) = \mathbf{card}(\mathrm{A}) + \mathbf{card}(\bar{\mathrm{A}})$
- Si A et B sont deux ensembles quelconques alors :

  $\mathbf{card}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{card}(\mathbf{A}) + \mathbf{card}(\mathbf{B}) - \mathbf{card}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$

d. Exemple

Un ensemble E de 100 appareils fabriqués par une usine peuvent présenter deux types de défauts désignés par défaut 1 et défaut 2. 10 parmi ces appareils présentent le défaut 1, 8 appareils présentent le défaut 2 et 4 appareils présentent les deux défauts. En désignant par A l'ensemble des appareils présentant le défaut 1 et par B celui des appareils présentant le défaut 2, déterminer :

1. le nombre d'appareils qui présentent au moins un défaut.
2. En déduire le nombre d'appareils ne présentant aucun défaut.

Solution :

1. L'ensemble des appareils qui présentent au moins un défaut est $A \cup B$.

   $\mathrm{card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{card}(\mathrm{A}) + \mathrm{card}(\mathrm{B}) - \mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

   $= 10 + 8 - 4$

   $\mathrm{card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 14$

   Donc il y a 14 appareils qui présentent au moins un défaut.
2. Soit C l'ensemble des appareils ne présentant aucun défaut. On a : $E = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$ car un appareil de E présente au moins un défaut ou bien ne présente aucun défaut donc et les ensembles $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ et C sont disjoints. Ainsi : $\mathrm{Card}(\mathrm{E}) = \mathrm{card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) + \mathrm{card}(\mathrm{C})$

Par suite $\mathrm{card}(\mathrm{C}) = \mathrm{Card}(\mathrm{E}) - \mathrm{card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$

$$= 100 - 14$$

$$\text{card}(C) = 86$$

Donc il y a 86 appareils qui ne présentent aucun défaut.

2. Dénombrer en utilisant un arbre de choix

En dénombrement, quand on veut déterminer le nombre de façons de réaliser une tâche qui s'effectue selon des actions successives, on peut utiliser un arbre de choix qui est composé de branches.

➢ **Exemple**

Amar Fall a oublié le mot de passe de son portable mais il se rappelle qu'il était constitué d'une lettre minuscule de son prénom, suivi d'un chiffre de l'année 2022 puis d'une lettre majuscule de son nom. Combien de possibilités y a-t-il pour son mot de passe ? Citer les.

Solution de l'exemple

3. Produit cartésien de deux ensembles

a. Définition et exemple

Le produit cartésien d'un ensemble A par un ensemble B est l'ensemble noté $A \times B$ (on lit A croix B) dont les éléments sont les couples formés par un élément a de A suivi d'un élément b de B noté (a, b). Par exemple Pour $A = \{1; 8\ ; \ -3\}$ et $B = \{a; 3\}$, une écriture en extension de $A \times B$ est $A \times B = \{(1;\ a), (1;\ \ 3), (8;\ a), (8;\ 3), (-3;\ a), (-3;\ 3)\}$

Remarque

Si $a \neq b$ alors $(a, b) \neq (b, a)$ tandis que $\{a; b\} = \{b; a\}$.

b. Principe multiplicatif

Si A et B sont deux ensembles alors $\mathbf{card(A \times B) = card(A) \times card(B)}$. Cette propriété est appelée principe multiplicatif. Plus généralement, si $A_1, A_2, \dots$ et A_p sont des ensembles alors :

$$\mathbf{card\left(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p\right) = card(A_1) \times card(A_2) \times \dots \times card\left(A_p\right)}$$

c. Remarque

Dans la pratique, le principe multiplicatif se généralise et s'applique sous la forme équivalente suivante :

Si une tâche peut s'effectuer en p actions successives et s'il y a n_1 façons d'effectuer la $1^{ère}$ action, n_2 façons d'effectuer la $2^{ème}$ action, n_3 façons d'effectuer la $3^{ème}$ action, …. , n_p façons d'effectuer la $p^{ème}$ action alors le nombre de façons d'effectuer cette tâche est $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$

NB : Le principe multiplicatif est l'un des outils les plus fréquemment utilisés en dénombrement.

Exercice d'application

Déterminons le nombre d'entiers naturels à trois chiffres distincts.

Solution

Former un entier naturel à trois chiffres distincts est une tâche qui peut s'effectuer en 3 actions successives.

- La $1^{ère}$ action est le choix du 1^{er} chiffre du nombre. **Il y a 9 façons possibles de le choisir. car il y a 10 chiffres mais 0 doit être exclu.**
- La $2^{ème}$ action est le choix du $2^{ème}$ chiffre du nombre. **Il y a 9 façons possibles de le choisir car le $2^{ème}$ chiffre doit être distinct du premier choisi dans la $1^{ère}$ action mais cette fois ci 0 peut être choisi.**

- La $3^{ème}$ action est le choix du $3^{ème}$ chiffre du nombre. **Il y a 8 façons possibles de le choisir car le $3^{ème}$ chiffre doit être distinct du 1^{er} et du $2^{ème}$ chiffre déjà choisis.**

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre d'entiers naturels à trois chiffres distincts est $\mathbf{9 \times 9 \times 8 = 648}$.

4. Dénombrer en utilisant un tableau à double entrée

En dénombrement, lorsqu'une tache peut s'effectuer en deux actions successives, on peut utiliser un tableau à double entrée.

Exemple

On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules numérotées de 1 à 3 et d'une urne U_2 contenant trois boules portant les numéros -2, -1 et 0. On tire deux boules de la façon suivante : la première dans U_1 puis la deuxième dans U_2 et on note dans l'ordre des tirages les deux numéros des boules tirées. Déterminer le nombre de tirages de deux boules dont la somme des numéros tirés est un entier relatif pair. Citer ces tirages.

Solution

On peut utiliser un tableau à double entrée.

Numéros des boules de U_1 ▶ / Numéros des boules de U_2 ▼	1	2	3
-2	(1;-2) $S = -1$	(2 ;-2) ; S= 0	(3 ; -2) ; S=1
-1	(1;-1) S=0	(2 ; -1) ; S=1	(3 ; -1) ; S=2
0	(1;0) ;S=1	(2 ; 0) ; S=2	(3 ; 0) ; S=3

Le nombre de tirages dont la somme des numéros est un entier relatif pair est 4. Ces tirages sont : (2 ;-2) ; (1;-1) ; (3 ; -1) et (2 ; 0).

Exercice à faire : Une marque d'automobile produit 3 modèles A, B et C :

- ✓ Le modèle A se fait en types : Berline et break.
- ✓ Le modèle B se fait en trois types : Berline, break et cabriolet.
- ✓ Le modèle C se fait en deux types Cabriolet et break

Chaque voiture est vendue en 4 couleurs. Combien de choix s'offrent à un client désirant acheter une voiture de cette marque ?

III. Outils de dénombrement

1. p-listes

a. Définition, exemple et notation

Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel $(p \geq 1)$. Une p-liste (ou p-uplet) d'éléments de E est une suite ordonnée de p éléments distincts ou non de E. Par exemple si $E = \{a, b, c\}$ alors

- a b est une 2-liste d'éléments de E.
- bab est une 3-liste d'éléments de E.
- bbbb est une 4-liste d'éléments de E.

Remarque

- Avec les p-listes, l'ordre des éléments est important et que la répétition est possible.
- Pour un ensemble E de cardinal n, on peut avoir une p-liste d'éléments de E tels que $p \geq n$

b. Propriété

Si $\mathrm{card}(E) = n$ et **p** est un entier tel que $p \geq 1$ alors le nombre de p-listes d'éléments de E est $\mathbf{n^p}$. Par exemple, le nombre de 2-listes de $E = \{a, b, c\}$ est $3^2 = 9$.

c. Tirages successifs avec remise

Tirer successivement avec remise p éléments parmi les n éléments d'un ensemble consiste à les tirer un par un, en remettant à chaque fois l'élément tiré avant de tirer le suivant. En les tirant successivement, on établit un ordre de sortie entre ces éléments tirés et comme il y a remise, on peut tirer un élément, le remettre, le tirer à nouveau, le remettre, le tirer une $3^{\text{ème}}$ fois, …… A la fin des p tirages, le résultat obtenu peut être identifié à une p-liste d'éléments de cet ensemble. Ainsi le nombre de tirages successifs avec remise de p éléments tirés parmi n éléments est n^p.

Exemple

Une urne contient 6 boules numérotées 1 à 6. On tire successivement avec remise 2 boules de l'urne. Déterminons le nombre de tirages possibles.

Solution

Comme on tire successivement avec remise 2 boules dans un sac contenant 6 boules alors un tirage est une 2-liste d'éléments pris parmi les 6 boules de l'urne donc le nombre de tirages possibles est $6^2 = 36$

2. Arrangement

a. Définition, exemple et notation

Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel $(1 \leq p \leq n)$. Un arrangement de p éléments (ou p-arrangement) de E est une liste (suite ordonnée) de p éléments **distincts** de E. Par exemple si $E = \{1; 5; 6\}$ alors :

- 15 est un arrangement de 2 éléments de E.
- 651 et 516 sont des arrangements de 3 éléments de E.

Remarque : Avec les arrangements, l'ordre des éléments est important et qu'il n'y a pas de répétition d'éléments.

b. Propriété

Si n et p sont des entiers naturels tels que $(2 \leq p \leq n)$ alors le nombre d'arrangements de p éléments pris parmi les n éléments est noté $\mathbf{A_n^p}$ et est égal au produit des p entiers consécutifs dont le plus grand est n. A_n^p se lit « A n p ». On a : $\mathbf{A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-(p-1))}$

Exemple

- Le nombre d'arrangements de 2 éléments pris parmi 5 éléments est noté $\mathbf{A_5^2}$ et est égal à $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$
- Le nombre d'arrangements de 3 éléments pris parmi 6 éléments est noté A_6^3 et est égal à $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

Remarque

- $A_n^1 = n$
- Par convention $A_n^0 = 1$
- Si $p > n$ alors $A_n^p = 0$

c. Tirages successifs sans remise

Tirer successivement sans remise **p** éléments parmi **n** éléments consiste à les tirer un par un, en écartant à chaque fois l'élément tiré avant de tirer le suivant. En les tirant successivement, on établit un ordre de sortie entre ces éléments tirés et comme il y n'y a pas de remise alors les p éléments tirés sont distincts. Ainsi à la fin des p tirages, le résultat obtenu peut être identifié à un arrangement de p éléments parmi ces n éléments. Ainsi le nombre de tirages successifs sans remise de p éléments tirés parmi n éléments est A_n^p.

d. Exemple

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire successivement sans remise 2 boules de l'urne. Déterminons le nombre de tirages possibles.

Solution

Comme on tire successivement sans remise 2 boules dans une urne contenant 4 boules alors le nombre de tirages possibles est $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$

3. Permutation

a. Définition et exemple

Soit E un ensemble de cardinal n. Une permutation de E est un arrangement de **n** éléments de E. Par exemple si $E = \{a, b, c, \}$ alors abc ; bac ; bca …. sont des permutations de E.

b. Propriété

Si n est un entier tel que $n \geq 2$ alors le nombre de permutations d'un ensemble contenant n éléments est $A_n^n = n(n-1)(n-2) \ldots .\times 2 \times 1$.

c. Remarques

- A_n^n est noté n! et se lit « factorielle n ». Ainsi $n! = n(n-1)(n-2) \ldots .\times 2 \times 1$ est le produit des n premiers entiers consécutifs.
- Par convention $0! = 1! = 1$
- Si $0 \leq p \leq n$ alors $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ (Cette formule n'est pas pratique pour faire des calculs)

Exercice : Calculer $2!; 3!$ et $6!$

Solution

- $2! = 2 \times 1 = 2$;
- $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
- $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

4. Combinaison

a. Définition et exemple

Soit E est un ensemble de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$. Une Combinaison de p éléments de E est une partie de E de cardinal p. Par exemple si $E = \{a, b, c, d\}$ alors :

- $\{a\}$ est une combinaison d'un élément de E.
- $\{a, b\}$ est une combinaison de 2 éléments de E.

Remarque

- Une combinaison se note avec des accolades.
- Dans une combinaison, les éléments ne sont pas ordonnés et il n'y a pas de répétition d'élément.

b. Propriété

Si E est un ensemble de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$ alors le nombre de combinaisons de p éléments de E noté $\mathbf{C_n^p}$ (on lit « C n p ») est égal à $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$ et on a :

- ✓ $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- ✓ $C_n^0 = C_n^n = 1$
- ✓ $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
- ✓ $C_n^p = C_n^{n-p}$
- ✓ $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ avec $1 \leq p \leq n$ (Formule de Pascal)
- ✓ Si $p > n$ alors $C_n^p = 0$

c. Tirages simultanés

Tirer simultanément **p** éléments $(1 \leq p \leq n)$ parmi **n** éléments distincts $e_1; e_2; e_3; \dots; e_n$ consiste à tirer les p éléments d'un seul coup. En tirant d'un seul coup p éléments, alors ces p éléments sont distincts et il n'y a pas d'ordre de sortie entre eux. A la fin du tirage, on obtient un résultat que l'on peut identifier à une partie de cardinal p de l'ensemble $E = \{e_1; e_2; e_3; \dots; e_n\}$. Ainsi le nombre de tirages simultanés de p éléments tirés parmi n éléments distincts est égal au nombre de parties de cardinal p d'un ensemble de cardinal n c'est-à-dire C_n^p.

d. Exemple

Un sac contient 10 boules numérotées de 1 à 10, on tire simultanément 7 boules du sac. Déterminer le nombre de tirages possibles.

Solution

Comme on tire simultanément 7 boules dans un sac contenant 10 boules alors le nombre de tirages possibles est $C_{10}^7 = C_{10}^3 = 120$.

e. Triangle de Pascal (Blaise)

Le triangle de Pascal est un tableau triangulaire à double entrée qui donne les valeurs des C_n^p , les nombres de la 1ère colonne sont les valeurs de **n** tandis que ceux de la 1ère ligne sont celles de **p**. Sauf la première cage, toutes les cages de la 2ème colonne sont occupées par 1 et la formule $\mathbf{C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}}$, $1 \leq p \leq n$ est la clé pour remplir les autres cages du tableau c'est-à-dire le nombre qui occupe chacune de ces cages s'obtient en faisant la somme du nombre qui occupe la cage qui est au-dessus et de celui qui occupe la cage qui est à gauche de cette dernière. Les cages vides étant considérées comme occupées par 0.

p \ n	0	1	2	3	4	5	…….
0	**1**						…….
1	**1**	**1**					…….
2	**1**	**2**	**1**				…….
3	**1**	**3**	**3**	**1**			…….
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**		…….
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**	…….
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

f. Formule du binôme de Newton

La formule du binôme de Newton est une formule qui donne une forme développée et réduite de $(a+b)^n$ où a et b sont des nombres réels et n un entier naturel ($n \geq 2$).

On a : $\mathbf{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n}$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Application

$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^{3-1} b + C_3^2 a^{3-2} b^2 + C_3^3 a^{3-3} b^3 = 1a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + 1b^3$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^{4-1}b + C_4^2 a^{4-2}b^2 + C_4^3 a^{4-3}b^3 + C_4^4 a^{4-4}b^4$$
$$= 1a^4 + 4a^3b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,ab^3 + 1b^4$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,ab^3 + b^4$$

CHAPITRE 11 : PROBABILITES

Durée : 8h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer le vocabulaire probabiliste ;
- ✓ Calculer la probabilité d'un événement ;
- ✓ Restituer et utiliser la formule de la probabilité de la réunion de deux événements et de l'évènement contraire ;
- ✓ Restituer et utiliser la formule de la probabilité d'un évènement dans le cas de l'équiprobabilité ;
- ✓ Calculer la probabilité conditionnelle d'un événement ;
- ✓ Montrer que deux événements sont indépendants ;
- ✓ Restituer et utiliser la formule des probabilités totales ;
- ✓ Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire ;
- ✓ Calculer l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire ;
- ✓ Déterminer et représenter la fonction de répartition d'une variable aléatoire ;
- ✓ Restituer et utiliser la formule de la loi binomiale.

Prérequis :

- ✓ Dénombrement ;
- ✓ Représentation graphique d'une fonction en escalier.

Supports didactiques : ;

- ✓ Document FASTEF ;
- ✓ Ordinateur ;
- ✓ VISA BAC .

Plan de la leçon

CHAPITRE 11 : PROBABILITES

INTRODUCTION:

Dans cette vie, il y a des phénomènes aléatoires (phénomènes dont on ne peut pas prédire avec certitude la réalisation ou non). Par exemple peut-on dire avec certitude si demain il fera chaud ou froid ? S'il va pleuvoir ou non ? Ainsi la probabilité est une branche des mathématiques qui a pour objet l'étude des phénomènes aléatoires. Il s'agit donc d'une science qui peut permettre de prédire la fréquence d'apparition de tels phénomènes. C'est pourquoi, elle est devenue quasi incontournable dans plusieurs domaines de la vie tels que la météo, la médecine, la gestion et la finance pour ne citer que cela.

I. Vocabulaire utilisé en probabilité

1. Expérience aléatoire et univers

- On dit qu'une expérience est aléatoire si elle est imprévisible (on ne peut pas déterminer avec certitude son résultat) mais on peut décrire l'ensemble des résultats possibles. Une expérience aléatoire est aussi appelée épreuve.
- L'ensemble des résultats possibles d'une épreuve est appelé univers et est souvent noté Ω.

2. Exemples

- ✓ Quand on lance une pièce de monnaie puis on note la face supérieure apparue alors on a une épreuve dont l'univers est $\Omega = \{\text{pile}; \text{face}\}$.
- ✓ Quand on lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 puis on note le chiffre apparu sur sa face supérieure, on a une épreuve dont l'univers est $\Omega = \{1; 2; 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$.

3. Évènement

a. Eventualité

Dans une épreuve, on appelle éventualité, tout résultat possible de l'épreuve. Par exemple dans le lancer d'une pièce de monnaie, pile est une éventualité tout comme face et dans l'épreuve du lancer d'un dé cubique, 1 ; 2 ; 6 … sont des éventualités.

b. Événement

Dans une épreuve d'univers Ω, on appelle évènement, tout sous-ensemble Ω c'est-à-dire tout ensemble d'éventualités. Par exemple dans l'épreuve du lancer d'un dé cubique, $A = \{2; 4; 1\}$ est un sous-ensemble de l'univers $\Omega = \{1; 2; 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ donc A est un événement de cette épreuve.

c. Remarques : Dans une épreuve,

- L'ensemble vide est un événement appelé évènement impossible.
- L'univers Ω est un événement appelé évènement certain.
- Un événement contenant une seule éventualité est appelé évènement élémentaire.
- On dit qu'un événement A se réalise si on obtient comme résultat, une éventualité de A.

d. Évènement « A et B » ; événement « A ou B »

Soient A et B deux événements dans une épreuve.

- l'événement $A \cap B$ est dit événement « A et B ».
- L'événement $A \cup B$ est dit événement « A ou B »,

Remarque

Quand $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont incompatibles.

e. Évènement contraire

Dans une épreuve d'univers Ω, $\overline{A}$, le complémentaire d'un événement A dans Ω est dit événement contraire de A.

II. Notion de probabilité

1. Définition

Dans une épreuve d'univers Ω, on appelle probabilité d'un événement A, le réel noté $P(A)$ appartenant à l'intervalle $[0;1]$ tel que :

- Si $A = \Omega$ alors $P(A) = 1$
- Si $A = \emptyset$ alors $P(A) = 0$
- Pour tout événement $A = \{e_1;\ e_2; \dots;\ e_n\}$ alors $P(A) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \cdots + P(\{e_n\})$

2. Propriétés

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si A et B sont quelconques alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A_1;\ A_2; \dots;\ A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles alors

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n)$$

3. Exemple

On lance un dé cubique truqué (pipé) dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note p_i, la probabilité d'apparition de la face numéro i telle que : $p_1 = p_2;\ p_3 = p_4 = 3\,p_1 ;\ p_5 = p_6 = 2\,p_1$.

1. Calculer p_1
2. Calculer la probabilité de l'événement A : « Obtenir une face de numéro supérieur à 3. »

Solution

L'univers de cette épreuve est $\Omega = \{1; 2; 3 ; 4; 5; 6\}$. Ainsi : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ et $\{6\}$ sont les événements élémentaires de l'univers Ω. Par définition de la probabilité d'un événement, on a : $P(\Omega) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$. De plus, $P(\Omega) = 1$ donc, $P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$. Or d'après l'énoncé, $P(\{1\})$ est noté par p_1 , $P(\{2\})$ par $p_2, \dots,$ $P(\{6\})$ par p_6. On peut donc utiliser ces notations et écrire :

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

1. Comme $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ et $p_1 = p_2 ;\ p_3 = p_4 = 3\,p_1 ;\ p_5 = p_6 = 2\,p_1$ donc $p_1 + p_1 + 3\,p_1 + 3\,p_1 + 2\,p_1 + 2\,p_1 = 1$ d'où $12\,p_1 = 1$. Ainsi, $p_1 = \frac{1}{12}$.

2. L'événement A : «Obtenir une face de numéro supérieur à 3.» peut aussi s'écrire : $A = \{4; 5; 6\}$ donc $P(A) = p_4 + p_5 + p_6$ or $p_4 = 3p_1$ et $p_5 = p_6 = 2\, p_1$ donc

$P(A) = 3\, p_1 + 4\, p_1 = 7\, p_1$ d'où $P(A) = \frac{7}{12}$

Exercice à faire : Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne, on note p_i, $i \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, la probabilité de tirer le jeton numéroté i.

1. On suppose que les nombres $p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5;\ p_6$ sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $\frac{1}{30}$. Déterminer p_1 puis en déduire $p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5;\ p_6$.

2. On suppose que les nombres $p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5;\ p_6$ sont dans cet ordre en progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Déterminer p_1 puis en déduire $p_2;\ p_3;\ p_4;\ p_5;\ p_6$.

4. Équiprobabilité

Dans une épreuve d'univers Ω, on dit qu'il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Dans les exercices, l'équiprobabilité est annoncée par des expressions comme : tirer au hasard, boules indiscernables au toucher, dé parfait ; pièce équilibrée, cartes bien battues…..

a. Propriété

Dans une épreuve d'univers Ω, s'il y a équiprobabilité alors la probabilité d'un événement A est $P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$

NB : S'il y a équiprobabilité, calculer une probabilité d'un événement se ramène à problème de dénombrement.

b. Exemple

On tire simultanément au hasard 3 boules d'une urne contenant 4 boules rouges numérotées de 1 à 4 et 7 boules noires numérotées de 1 à 7. Les boules sont indiscernables au toucher. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. A : « Tirer une boule rouge et deux boules noires »
2. B : «Tirer des boules de même couleur.»

3. C : « Obtenir deux couleurs différentes.»

Solution

Comme les boules sont indiscernables au toucher et que le tirage se fait au hasard, on considère qu'il y a équiprobabilité donc on peut utiliser la formule $P(A) = \frac{Card(A)}{card(\Omega)}$ pour tout événement A.

L'univers Ω de cette épreuve est l'ensemble des tirages simultanés de 3 boules parmi les 11 boules de l'urne donc $card(\Omega) = C_{11}^{3} = \frac{A_{11}^{3}}{3!} = \frac{11\times10\times9}{6} = 165$ d'où $card(\Omega) = 165$

1. Pour la réalisation de l'événement A, on doit tirer une boule rouge parmi les 4 boules rouges que contient l'urne **et** deux boules noires parmi les 7 boules noires de l'urne. Donc $card(A) = C_4^1 \times C_7^2 = 4 \times 21 = 84$. Donc $card(A) = 84$. Par suite
   $P(A) = \frac{Card(A)}{card(\Omega)} = \frac{84}{165} = \frac{28}{55}$
2. Pour la réalisation de l'événement B, on doit tirer 3 boules de même couleur. Ainsi deux cas disjoints se présentent : tirer 3 boules rouges parmi les 4 boules rouges de l'urne **ou** tirer 3 boules noires parmi les 7 boules noires de l'urne. donc $card(B) = C_4^3 + C_7^3 = 4 + 35 = 39$ Donc $card(B) = 39$. Par suite $P(B) = \frac{Card(B)}{card(\Omega)} = \frac{39}{165} = \frac{13}{55}$
3. Pour la réalisation de l'événement C, on doit avoir deux couleurs différentes sur les 3 boules que l'on doit tirer. Ainsi, on a les deux cas disjoints suivants : tirer 1 boule rouge et deux boules noires **ou** tirer 2 boules rouges et une boule noire. Donc $card(C) = C_4^1 \times C_7^2 + C_4^2 \times C_7^1 = 84 + 42 = 126$. Par suite $P(C) = \frac{Card(C)}{card(\Omega)} = \frac{126}{165} = \frac{42}{55}$

Exercice : Pour l'exemple ci-dessus, calculer la probabilité d'obtenir une boule noire et deux boules rouges.

III. Probabilité conditionnelle

1. Définition et notation

Soient A et B deux événements d'une épreuve telle que $P(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé, notée $P(B/A)$ ou $P_A(B)$ est : $P(B/A) = P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

$P(B/A) = P_A(B)$ se lit « P de B sachant A »

2. Propriétés

- Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ alors $P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A) = P(A/B) \times P(B)$
- $P(B/A) = 1 - P(\overline{B}/A)$ et $P(A/B) = 1 - P(\overline{A}/B)$

3. Exemple

Une urne contient 2 boules vertes numérotées de 1 à 2, trois boules jaunes numérotées de 1 à 3 et 4 boules rouges numérotées de 1 à 4 qui sont indiscernables au toucher. On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne. Calculons la probabilité d'avoir 3 boules de même couleur sachant que la première boule tirée est rouge.

Solution

On a l'équiprobabilité car les boules sont indiscernables au toucher. L'univers Ω de cette épreuve est l'ensemble des triages successifs sans remise de 3 boules prises parmi 9 boules. Donc $\text{card}(\Omega) = A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$.

Soit l'événement A : « avoir 3 boules de même couleur » et B : « la $1^{\text{ère}}$ boule tirée est rouge »

NB : Le terme **sachant** laisse souvent penser à une probabilité conditionnelle.

Nous voulons calculer la probabilité de A sachant que B est réalisé c'est-à-dire $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

$A \cap B$: « Avoir 3 boules de même couleur et la $1^{\text{ère}}$ tirée est rouge »

Avoir 3 boules de même couleur et la $1^{\text{ère}}$ tirée est rouge = Avoir 3 boules rouges donc

$A \cap B$: « Avoir 3 boules rouges»

$\text{card}(A \cap B) = A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ d'où $P(A \cap B) = \frac{\text{card}(A\cap B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{24}{504} = \frac{1}{21}$

L'événement B consiste à tirer une $1^{\text{ère}}$ boule qui est rouge donc les deux autres boules peuvent être de couleurs quelconques c'est-à-dire qu'on va tirer les deux boules restantes dans les 8 boules qui restent dans l'urne puisque nous en avons déjà tiré une boule. D'où

$\text{card}(B) = A_4^1 \times A_8^2 = 4 \times 8 \times 7 = 224$

$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{224}{504} = \frac{4}{9}$

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{21}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{21} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{28}$$

4. Formule des probabilités totales

a. Théorème 1 (Formule des probabilités totales pour 2 événements)

Dans une épreuve, si A et B sont deux événements alors :

- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A/B) \times P(B) + P(A/\overline{B}) \times P(\overline{B})$ et
- $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(B/A) \times P(A) + P(B/\overline{A}) \times P(\overline{A})$

b. Théorème 2 (Formule générale des probabilités totales)

Dans une épreuve, si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des événements qui forment une partition de l'univers Ω alors la probabilité d'un événement A peut s'écrire :

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \cdots + P(A \cap A_n)$$

$$= P(A/A_1) \times P(A_1) + P(A/A_2) \times P(A_2) + .. + P(A/A_n) \times P(A_n)$$

c. Exemple

Dans un lot de pièces fabriquées, il y a 5% de pièces défectueuses. On contrôle les pièces mais le mécanisme de contrôle n'est pas totalement fiable de telle sorte que :

- Si une pièce est bonne alors elle est acceptée avec une probabilité de 0,96.
- Si elle est défectueuse alors elle est refusée avec une probabilité de 0,98.

On choisit au hasard une pièce que l'on contrôle et on désigne par A, l'événement « la pièce est bonne » et par B, l'événement « la pièce est acceptée ».

1. Donner la probabilité de B sachant A puis la probabilité de $\overline{B}$ sachant $\overline{A}$.
2. Calculer la probabilité de $\overline{B}$ sachant A. En déduire la probabilité de l'événement : « la pièce est refusée. »
3. Calculer la probabilité de l'événement : « la pièce est refusée et elle est bonne »
4. Calculer la probabilité de A sachant $\overline{B}$.

Solution :

NB : Un pourcentage exprime souvent une probabilité.

1. La probabilité de B sachant A, $P(B/A)$ est la probabilité pour que la pièce soit acceptée sachant qu'elle est bonne. Or d'après l'énoncé, si une pièce est bonne alors elle est acceptée avec une probabilité de 0,96 donc $P(B/A) = 0{,}96$.

B est l'événement « la pièce est acceptée » donc $\overline{B}$ est l'événement « la pièce est refusée.» et A est l'événement « la pièce est bonne » donc $\overline{A}$ est l'événement « la pièce est défectueuse.»

La probabilité de $\overline{B}$ sachant $\overline{A}$, $P(\overline{B}/\overline{A})$ est la probabilité pour que la pièce soit refusée sachant qu'elle est défectueuse. Or d'après l'énoncé, si une pièce est défectueuse alors elle est refusée avec une probabilité de 0,98 donc $P(\overline{B}/\overline{A}) = 0{,}98$.

2. La probabilité de $\overline{B}$ sachant A, $P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$.

La probabilité de l'événement : « la pièce est refusée. » est $P(\overline{B})$
D'après la formule totale des probabilités, $P(\overline{B}) = P(\overline{B}/\overline{A})\ P(\overline{A}) + P(\overline{B}/A)\ P(A)$. Comme $P(\overline{A})$ est la probabilité pour que la pièce soit défectueuse et que d'après l'énoncé, il y a 5% de pièces défectueuses donc $P(\overline{A}) = 5\% = 0{,}05$ d'où $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ Par suite, $P(\overline{B}) = 0{,}98 \times 0{,}05 + 0{,}04 \times 0{,}95 = 0{,}087$.

3. La probabilité de l'événement : « la pièce est refusée et elle est bonne » est $P(\overline{B} \cap A)$. $P(\overline{B} \cap A) = P(\overline{B}/A)\ P(A) = 0{,}04 \times 0{,}95 = 0{,}038$.

4. La probabilité de A sachant $\overline{B}$, $P(A/\overline{B}) = \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{B}\cap A)}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}038}{0{,}087} = 0{,}4367$

Exercice à faire : Pour l'exemple ci-dessus, calculer : la probabilité de l'événement : « la pièce est défectueuse et elle est acceptée. », la probabilité pour que la pièce soit défectueuse sachant qu'elle est acceptée et la probabilité pour que la pièce soit bonne sachant qu'elle est acceptée.

5. Événements indépendants

a. Définition

Dans une épreuve, deux événements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre c'est-à-dire $P(A/B) = P(A)$ et $P(B/A) = P(B)$

b. Propriété

Dans une épreuve, deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

6. Arbres pondérés

En probabilité, les arbres pondérés permettent de visualiser une situation et peuvent aider à calculer des probabilités d'événements. Ce sont des arbres de choix qui sont composés de nœuds et de branches telles que chaque nœud représente un événement et chaque branche mène vers un événement.

a. Comment construire un arbre pondéré

- Le premier nœud représente l'univers.
- Sur une branche qui relie l'univers à un événement A, on indique la probabilité de A, P(A).
- Sur chaque branche reliant un événement A à un événement B, on indique une probabilité conditionnelle comme suit :

$$A \xrightarrow{P(B/A)} B$$ avec A étant plus proche de l'univers que B.

- La somme des probabilités sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- Un chemin est une succession de branches issues de l'univers.
- Un chemin détermine l'intersection des événements représentés par ses nœuds et la probabilité de cette intersection est le produit des probabilités qui sont sur les branches de ce chemin.

b. Exemple

Dans un lot de pièces fabriquées, il y a 5% de pièces défectueuses. On contrôle les pièces mais le mécanisme de contrôle n'est pas totalement fiable de telle sorte que :

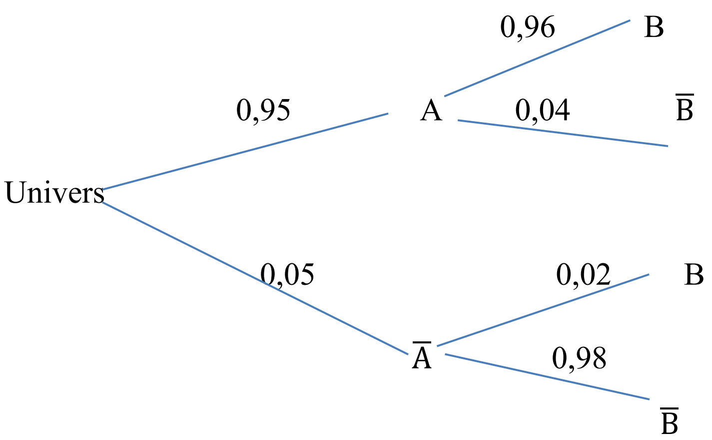
- Si une pièce est bonne alors elle est acceptée avec une probabilité de 0,96.
- Si elle est défectueuse alors elle est refusée avec une probabilité de 0,98.

On choisit au hasard une pièce que l'on contrôle et on désigne par A, l'événement « la pièce est bonne » et par B, l'événement « la pièce est acceptée ».

1. Donner la probabilité de B sachant A puis la probabilité de $\overline{B}$ sachant $\overline{A}$.
2. Calculer la probabilité de $\overline{B}$ sachant A. En déduire la probabilité de l'événement : « la pièce est refusée. »
3. Calculer la probabilité de l'événement : « la pièce est refusée et elle est bonne. »
4. Calculer la probabilité de A sachant $\overline{B}$.

Solution

Comme on a des probabilités conditionnelles, on peut penser à construire un arbre pondéré.



1. D'après le texte, la probabilité de B sachant A est $P(B/A) = 0{,}96$ et la probabilité de $\overline{B}$ sachant $\overline{A}$ est $P(\overline{B}/\overline{A})$=0,98. Ainsi on peut écrire ces probabilités conditionnelles sur les branches de l'arbre.
2. Comme la somme des probabilités sur des branches issues d'un même nœud est égale à 1 alors $P(\overline{B}/A)$=1-0,96=0,04. La probabilité de l'événement : « la pièce est refusée. » est $P(\overline{B})$. On voit que pour avoir $\overline{B}$, on a le chemin univers $\rightarrow$ A$\rightarrow$ $\overline{B}$ ou le chemin univers $\rightarrow \overline{A} \rightarrow \overline{B}$. La probabilité correspondant au 1er chemin est $0{,}95 \times 0{,}04$ et la probabilité correspondant au 2ème chemin est $0{,}05 \times 0{,}98$. Ainsi $P(\overline{B})$= $0{,}95 \times 0{,}04 + 0{,}05 \times 0{,}98 = 0{,}087$.
3. probabilité de l'événement : « la pièce est refusée et elle est bonne » est $P(\overline{B} \cap A)$. Cette probabilité correspond au produit des probabilités situant sur le chemin univers $\rightarrow$ A$\rightarrow$ $\overline{B}$ Donc on a, $P(\overline{B} \cap A) = 0{,}95 \times 0{,}04 = 0{,}038$.
4. La probabilité de A sachant $\overline{B}$ est $P(A/\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}038}{0{,}087} = 0{,}4367$

IV. Variable aléatoire

1. Définition

On appelle variable aléatoire sur l'univers Ω d'une épreuve, tout procédé qui permet d'associer à chaque éventualité (résultat) de cette épreuve, un unique réel. Autrement dit une variable aléatoire sur un univers Ω est application de Ω dans $\mathbb{R}$. Une variable aléatoire est souvent notée X.

2. Exemple

Une urne contient 2 boules vertes numérotées 1 et 2 ; 3 boules jaunes numérotées de 1 à 3 et 5 boules rouges numérotées de 1 à 5, indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. L'univers Ω de cette épreuve est l'ensemble des tirages simultanés de 3 boules parmi 10 boules. En associant à chaque tirage simultané de trois boules, le nombre de couleurs obtenu, on définit une variable aléatoire X.

3. Univers image d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω d'une épreuve, l'univers image de X noté $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs possibles de X. Dans l'exemple ci-dessus, les valeurs possibles de X sont : 1 ; 2 et 3 car dans un tirage simultané de 3 boules parmi 10 boules comprenant des boules vertes, des boules jaunes et des boules rouges, on peut avoir une seule couleur dans les 3 boules tirées, ou deux couleurs dans les 3 boules tirées ou trois couleurs dans les trois boules tirées. On a donc $X(\Omega)=\{1;2;3\}$.

4. Définition d'événements à partir d'une variable aléatoire

La variable aléatoire X d'univers image $X(\Omega)=\{1;2;3\}$ de l'exemple ci-dessus permet de définir les événements suivants :

- $(X=1)$ signifie que X prend la valeur 1 et désigne l'événement « L'ensemble des tirages simultanés de 3 boules parmi 10 boules dans lesquels on a 1 seule couleur».
- $(X=2)$ signifie que X prend la valeur 2 et désigne l'événement « L'ensemble des tirages simultanés de 3 boules parmi 10 dans lesquels on a deux couleurs».
- $(X=3)$ signifie que X prend la valeur 3 et désigne l'événement « L'ensemble des tirages simultanés de 3 boules parmi 10 dans lesquels on a trois couleurs».

5. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

a. Exemple

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X de l'exemple ci-dessus dont l'univers image est $X(\Omega)=\{1;2;3\}$ consiste à calculer les probabilités des événements :

$(X=1)$; $(X=2)$ et $(X=3)$ notées respectivement p_1 ; p_2 et p_3.

Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X ci-dessus.

On calcule ainsi $p_1=P[(X=1)]$; $p_2=P[(X=2)]$ et $p_3=P[(X=3)]$

$\text{card}(\Omega) = C_{10}^{3} = \frac{A_{10}^{3}}{3!} = \frac{10\times9\times8}{2\times3} = 120.$

$(X = 1)$ est l'événement « L'ensemble des tirages simultanés de 3 boules parmi 10 dans lesquels on a 1 seule couleur » c'est-à-dire tirer 3 boules jaunes ou tirer 3 boules rouges donc $\text{card}[(X = 1)\,] = C_{3}^{3} + C_{5}^{3} = 11$

$p_1 = \frac{\text{card}[(X=1)\,]}{\text{card}(\Omega)} = \frac{11}{120}$

$p_2 = \frac{\text{card}[(X=2)]}{\text{card}(\Omega)}$

$(X = 2)$ est l'événement « L'ensemble des tirages simultanés de 3 boules parmi 10 boules dans lesquels on a deux couleurs» c'est-à-dire tirer une boule rouge et deux boules vertes ou tirer deux boules rouges et une boule verte ou tirer deux boules rouges et une boule jaune ou tirer une boule rouge et deux boules jaunes ou une boule verte et deux boules jaunes ou une boule jaune et deux boules vertes donc $\text{card}[(X = 2)\,] = C_{5}^{1} \times C_{2}^{2} + C_{5}^{2} \times C_{2}^{1} + C_{5}^{2} \times C_{3}^{1} + C_{5}^{1} \times C_{3}^{2} + C_{2}^{1} \times C_{3}^{2} + C_{3}^{1} \times C_{2}^{2} = 5 + 20 + 30 + 15 + 6 + 3 = 79$

$p_2 = \frac{79}{120}$

$p_3 = \frac{\text{card}[(X=3)\,]}{\text{card}(\Omega)}$

$(X = 3)$ est l'événement « L'ensemble des tirages simultanés de 3 boules parmi 10 dans lesquels on a 3 couleurs» c'est-à-dire tirer une boule rouge, une boule jaune et une boule verte donc $\text{card}[(X = 3)\,] = C_{5}^{1} \times C_{3}^{1} \times C_{2}^{1} = 30$

$p_3 = \frac{\text{card}[(X=3)\,]}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{4}$

La loi de probabilité sera présentée à l'aide d'un tableau comme suit :

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{1}{4}$

$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{11}{120} + \frac{79}{120} + \frac{1}{4} = \frac{11+79+30}{120} = 1$

On remarque que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

b. Remarque

Pour une variable aléatoire X dont l'univers image $X(\Omega)=\{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n\}$ telle que $p_1 = P[(X = x_1)]$; $p_2 = P[(X = x_2)]$; …. ; $p_n = P[(X = x_n)]$, on a : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

6. Espérance mathématique-variance et écart type

a. Définitions et exemples

Soit X une variable aléatoire d'univers image $X(\Omega)=\{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n\}$ et $p_1 = P\left[(X = x_1)\right]$; $p_2 = P\left[(X = x_2)\right]$; …..; $p_n = P\left[(X = x_n)\right]$

- L'espérance mathématique de X est le réel noté E(X) tel que

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_n \times p_n$$

Dans l'exemple ci-dessus, $E(X) = 1 \times \frac{11}{120} + 2 \times \frac{79}{120} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{259}{120}$

- La variance de X est le réel positif noté V(X) tel que

$V(X) = \sum_{i=1}^{n}[(x_i - E(X))^2\, p_i] = (x_1 - E(X))^2\, p_1 + (x_2 - E(X))^2\, p_2 + .. + (x_n - E(X))^2\, p_n$.

La variance est aussi donnée par la formule équivalente et plus pratique suivante dite formule de Koening : $V(X) = \sum_{i=1}^{n}({x_i}^2\, p_i) - [E(X)]^2 = {x_1}^2\, p_1 + {x_2}^2\, p_2 + .. + {x_n}^2\, p_n - [E(X)]^2$

Dans l'exemple ci-dessus, $V(X) = 1^2 \times \frac{11}{120} + 2^2 \times \frac{79}{120} + 3^2 \times \frac{1}{4} - (\frac{259}{120})^2 = \frac{4559}{120^2}$

- L'écart type de X est le réel positif noté $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Dans l'exemple ci-dessus, $\sigma(X) == \frac{\sqrt{4559}}{120}$

7. Fonction de répartition

a. Définition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est la fonction notée F et définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0; 1]$ par $F(x) = P(X \leq x)$ où $(X \leq x)$ est l'événement X prend des valeurs inférieures à x.

b. Propriété

Si X est une variable aléatoire prenant les valeurs x_1 ; x_2 ; x_3 … ; x_{n-1} et x_n telles que $x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_{n-1} < x_n$ et $p_i = P[(X = x_i)]$, $1 \leq i \leq n$ alors la fonction de répartition de X peut être donnée par le tableau suivant :

x	$x < x_1$	$x_1 \leq x < x_2$	$x_2 \leq x < x_3$	$\dots$	$x_{n-1} \leq x < x_n$	$x \geq x_n$
$F(x)$	0	p_1	$p_1 + p_2$	$\dots$	$p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$	1

c. Exemple

La variable aléatoire X de l'exemple précédent prend les valeurs 1 ; 2 et 3. Sa fonction de répartition F est donnée par :

x	$x < 1$	$1 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$	$x \geq 3$
$F(x)$	0	$\frac{11}{120}$	$\frac{11}{120} + \frac{79}{120} = \frac{3}{4}$	1

d. Représentation

Comme toute fonction, on peut représenter graphiquement une fonction de répartition. Pour cela, on va tracer un repère plan à axes orthogonaux puis on mettra en abscisses les valeurs prises par la variable aléatoire et en ordonnées, on mettra les valeurs de la fonction de répartition. Prenons l'exemple de la fonction de répartition précédente : On peut choisir comme échelle 1 $cm \to 1$ sur l'axe des abscisses, et 1 $cm \to 0{,}1$ sur l'axe des ordonnés

On a : $\frac{11}{120} \cong 0{,}09$ *et* $\frac{3}{4} = 0{,}75$

8. Loi binomiale

a. Définition 1

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve ayant seulement deux résultats possibles. L'un est généralement dit « succès » et l'autre « échec ». Par exemple l'épreuve qui consiste à lancer une pièce de monnaie et à noter la face supérieure qui est apparue est une épreuve de Bernoulli car elle a deux résultats seulement : pile et face, on peut dire par exemple qu'on a succès si c'est face qui est apparue et échec si c'est pile qui est apparue.

Lorsqu'on répète plusieurs fois de suite et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli, on dit qu'on a un schéma de Bernoulli. Par exemple si on lance 6 fois de suite une pièce de monnaie, alors on a répété 6 fois une épreuve de Bernoulli et donc on a un schéma de Bernoulli.

b. Définition 2

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres **n** et **p** si X est la variable aléatoire définie par le nombre de succès obtenus en répétant **n** fois de suite de manière indépendante une épreuve de Bernoulli ; **p** désignant la probabilité d'avoir un succès dans chacune de ces n épreuves de Bernoulli.

c. Théorème

Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres **n** et **p** alors la probabilité d'obtenir k succès $(0 \leq k \leq n)$ est $P[(X = k)] = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$; $E(X) = n \times p$ et $V(X) = n \times p \times (1-p)$

d. Exemple

On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée, on suppose qu'on a un succès à chaque fois que la face pile apparait. Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de succès au cours de ces 3 lancers.

1. Calculer la probabilité de l'événement $(X = 2)$.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Solution

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

1. $(X = 2)$ est l'événement : « Obtenir 2 succès (2 fois pile) au cours des 3 lancers »

$n = 3$ et p est la probabilité d'avoir un succès dans chacune de ces 3 épreuves de Bernoulli. Dans chacune de ces 3 épreuves de Bernoulli, l'univers est $\Omega = \{pile ; face\}$. Comme la pièce est équilibrée alors on a équiprobabilité dans chacune de ces 3 épreuves de Bernoulli d'où $P(\{pile\} = P(\{face\}) = p$ et comme $P(\Omega) = P(\{pile\} + P(\{face\}) = p + p = 1$ alors $2p = 1$ d'où $p = \frac{1}{2}$.

D'après le théorème précédent, on a $P\left[(X = 2)\right] = C_3^2 \times (\frac{1}{2})^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-2} = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

2. D'après le théorème précédent, on a $E(X) = n \times p = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $V(X) = n\,p\,(1 - p) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

CHAPITRE 12 : CALCUL INTEGRAL

Durée : 6h (Cours)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer et utiliser les propriétés de l'intégrale ;
- ✓ Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive ou d'une intégration par parties ;
- ✓ Calculer des aires planes.

Prérequis :

- ✓ Primitives

Supports didactiques :

- ✓ CIAM TSM ;
- ✓ Visa Bac ;

- ✓ CIAM Terminale SE ;
- ✓ Nouveau transmath programme 1998 ;
- ✓ Livre de TS2 de M. Saloly Ba ;
- ✓ Cours de TS2 de M. Babacar Djitté ;
- ✓ Cours de TS2 de M. Elimane Bousso ;
- ✓ Programme sénégalais.

Plan du chapitre

Déroulement du cours

CHAPITRE 12 : Calcul intégral

Introduction :

Pour calculer des aires, les mathématiciens grecs utilisaient des méthodes géométriques consistant à remplacer la surface considérée par un carré de même aire (Problème de quadrature).

Au 17$^{\text{ème}}$ siècle, KEPLER (1571-1630) obtient des formules pour calculer le volume de tonneaux à l'aide de décompositions de surfaces en domaines élémentaires. Enfin, LEIBNITZ (1646-1716) et NEWTON (1643-1727) construisent indépendamment et presque simultanément, une méthode pour la détermination des aires et des volumes : « le calcul intégral ».

Le calcul intégral est donc un outil permettant de calculer des aires et des volumes. De nos jours, il est utilisé dans plusieurs sciences : en physique avec la détermination du centre d'inertie, avec le calcul des moments d'inertie …, en statistique …

I. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$

1. Définition et notation

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. L'intégrale de a à b de f est le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ et défini par $\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ où F une primitive quelconque de f sur $[a; b]$. Les réels a et b sont dits bornes de l'intégrale et $\int_a^b f(x)dx$ se lit : « intégrale de a à b de f(x) dx ».

2. Remarque

✓ Le réel $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ est noté $[\mathrm{F}(x)]_a^b$ et se lit : « F(x) pris entre a et b ». Ainsi on écrit : $\int_a^b f(x)dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

- ✓ Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, la lettre x peut être remplacée par toute autre lettre sauf a et b c'est-à-dire, on a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots$ On dit que x est une variable muette.

3. Exemples : Calculons les intégrales suivantes : $\int_1^4 2x\,dx$ et $\int_{-1}^2 x^2\,dx$

- ✓ $\int_1^4 2x\,dx = [x^2]_1^4 = 16 - 1 = 15$
- ✓ $\int_{-1}^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$

Exercice à faire : Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x+\pi)\,dx$ et $\int_{-1}^1 e^{-x+1}\,dx$

4. Propriétés de l'intégrale

a. Conséquences immédiates de la définition

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. On a alors :

- ✓ $\int_a^a f(x)dx = 0$
- ✓ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

b. Linéarité de l'intégrale

Soient f et g des fonctions continues sur $[a;b]$ et α un réel constant. On a alors :

- ✓ $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- ✓ $\int_a^b [\alpha f(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
- ✓ $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

Exercice d'application

On pose $A = \int_0^\pi cos^2x\,dx$ et $B = \int_0^\pi sin^2x\,dx$

1. Calculer $A+B$ et $A-B$.
2. En déduire les valeurs de A et B.

Solution

1. $A+B = \int_0^\pi cos^2x\,dx + \int_0^\pi sin^2x\,dx = \int_0^\pi (cos^2x + sin^2x)\,dx = \int_0^\pi 1\,dx = [x]_0^\pi = \pi$

   donc $A+B = \pi$

$A-B = \int_0^\pi cos^2x\,dx - \int_0^\pi sin^2x\,dx = \int_0^\pi (cos^2x - sin^2x)\,dx = \int_0^\pi \cos 2x\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\,[\sin 2x]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin 0) = 0$ donc $A - B = 0$

2. $\begin{cases} A + B = \pi \\ A - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = \pi \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = \pi \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

c. Relation de CHASLES

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et $c \in [a; b]$. On a alors :

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Exemple

Calculons l'intégrale suivante **:** $\int_{-1}^{2} |x^2 + 2x| dx$

On a : $|x^2 + 2x| = \begin{cases} -x^2 - 2x & si\ x \in [-1; 0] \\ x^2 + 2x & si\ x \in [0; 2] \end{cases}$

D'après la relation de CHASLES, on a : $\int_{-1}^{2} |x^2 + 2x| dx = \int_{-1}^{0} |x^2 + 2x| dx + \int_{0}^{2} |x^2 + 2x| dx$

$= \int_{-1}^{0} -(x^2 + 2x)dx + \int_0^2 (x^2 + 2x)dx$

$= -\int_{-1}^{0} (x^2 + 2x)dx + \int_0^2 (x^2 + 2x)dx$

$= -\left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = 6$

d. Intégrale et inégalités

Soient f et g des fonctions continues sur $[a; b]$.

i. Propriétés

- ✓ Si pour tout $x \in [a; b], f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- ✓ Si pour tout $x \in [a; b], f(x) \leq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.
- ✓ Si pour tout $x \in [a; b], f(x) \geq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
- ✓ Si pour tout $x \in [a; b], f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- ✓ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

ii. Théorème (Inégalité de la moyenne)

- ✓ S'il existe deux réels constants m et M tels que pour tout $x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.
- ✓ S'il existe un réel constant positif M tel que pour tout $x \in [a;b]$, $|f(x)| \leq M$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$

Exercice à faire

1. Démontrer que pour tout $x \in [2;4]$, $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{4}$. En déduire un encadrement de $\int_2^4 \frac{1}{x^2}$.
2. Démontrer que $x \in \left[\frac{1}{2};2\right]$, $|\ln x| \leq \ln 2$. En déduire un encadrement de $\left|\int_{\frac{1}{2}}^2 \ln x\, dx\right|$.

II. Intégration par parties

1. Théorème

Soient u et v des fonctions dérivables sur $[a;b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a;b]$. On a alors $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x)u(x)dx$ (On peut aussi écrire $\int_a^b v'(x)u(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$)

2. Exemples :

En utilisant une intégration par parties, calculons les intégrales suivantes : $\int_1^e x\, ln\, x\, dx$ et $\int_{-1}^1 (x-2)e^x dx$

$\int_1^e x\, ln\, x\, dx$? On pose $u'(x) = x$ et $v(x) = ln\, x$ donc $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^e x\, ln\, x\, dx = \int_1^e u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e v'(x)u(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}[x^2 ln\, x]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}[x^2]_1^e = \frac{e^2+1}{4}$$

$\int_{-1}^1 (x-2)e^x dx$? On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x-2$ donc $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$

$$\int_{-1}^1 (x-2)e^x\, dx = \int_{-1}^1 u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 v'(x)u(x)dx$$

$$= [(x-2)e^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x\, dx$$

$$= -e + 3e^{-1} - [e^x]_{-1}^1$$

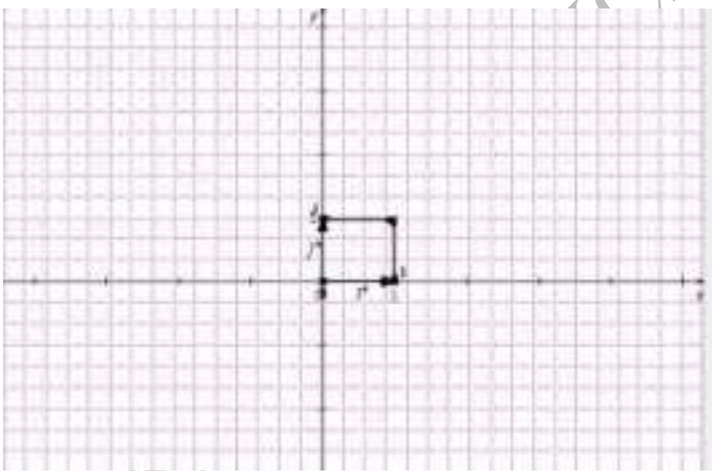
$$= -e + 3e^{-1} - (e - e^{-1}) = \frac{4-2e^2}{e}$$

Exercice d'application : En utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes : $\int_1^{e^2} \ln x \, dx$; $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$; $\int_{-1}^0 (x+2)e^{x+1} dx$ et $\int_2^3 (2x+1) \ln x \, dx$

III. Calcul d'aires et de volumes

Soient f et g des fonctions continues sur $[a;b]$, C_f et C_g leurs courbes dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $(D): x = a$ et $(D'): x = b$. Notre objectif est, dans un premier temps, de calculer, l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, C_f et les droites (D) et (D'), puis dans un second temps, l'aire du domaine délimité par C_f, C_g et les droites (D) et (D').

Pour exprimer ces aires, on prend souvent comme unité, l'aire du carré construit sur les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. L'aire de ce carré est donc dite une unité d'aire et est notée 1 u.a.



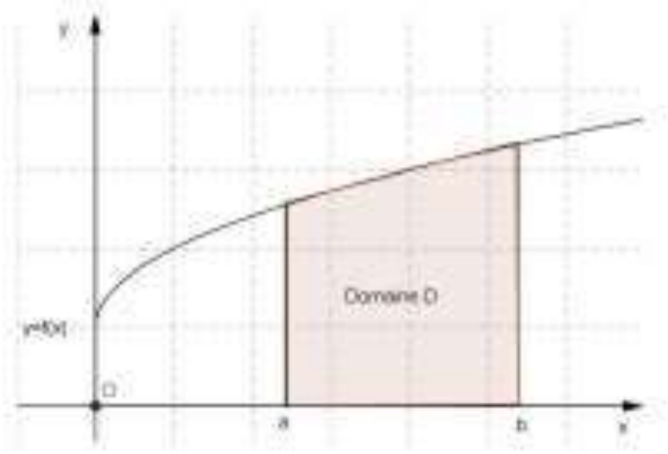
1. Aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, C_f et les droites (D) et (D')

a. Cas où C_f est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[a;b]$

- **Propriété**

Si C_f est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[a,b]$ (autrement dit si pour tout $x \in [a;b]$, on a $f(x) \geq 0$) alors l'aire (souvent notée $\mathcal{A}$) du domaine (souvent noté D), délimité par l'axe des abscisses, C_f et les droites $(D): x = a$ et $(D'): x = b$ exprimée en u.a est :

$\mathcal{A}(D) = (\int_a^b f(x)dx)\ u.a.$



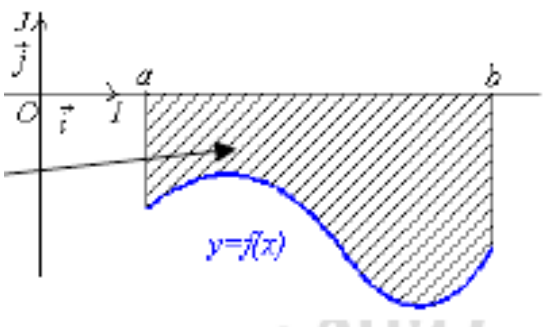
Dans le cas ci-dessus, le domaine D délimité par l'axe des abscisses, C_f et les droites

$(D): x = a$ et $(D'): x = b$ est l'ensemble des points M $\binom{x}{y}$ tels que a ≤ x ≤ b et 0 ≤ y ≤ $f(x)$.

b. **Cas où C_f est en dessous de l'axe des abscisses sur** $[a, b]$

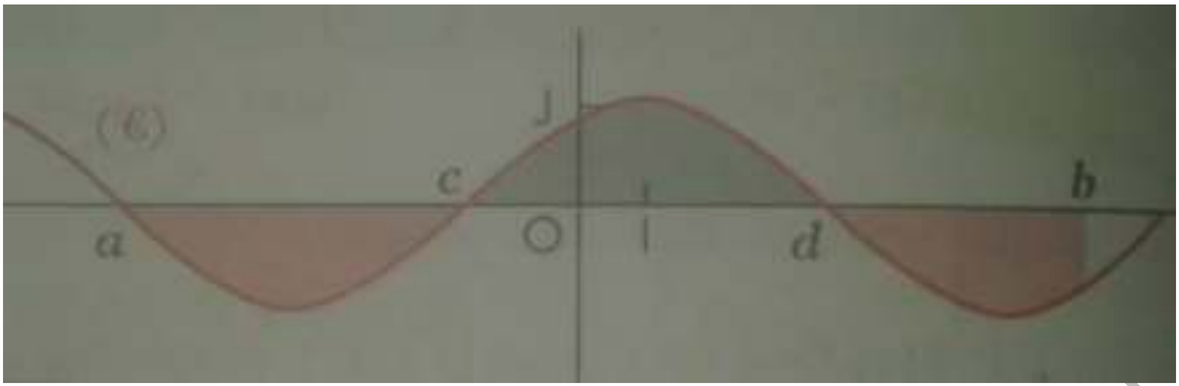
- **Propriété**

Si C_f est en dessous de l'axe des abscisses sur $[a, b]$ (i.e si pour tout ∈ $[a; b]$, $f(x) \leq 0$) alors l'aire du domaine D délimité par l'axe des abscisses, C_f et les droites $(D): x = a$ et $(D'): x = b$ exprimée en u.a est : $\mathcal{A}(D) = -(\int_a^b f(x)dx)\ u.a.$



Dans le cas ci-dessus, le domaine D est l'ensemble des points $M\binom{x}{y}$ tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$.

c. **Cas où C_f est à la fois en dessous et au-dessus de l'axe des abscisses sur** $[a, b]$



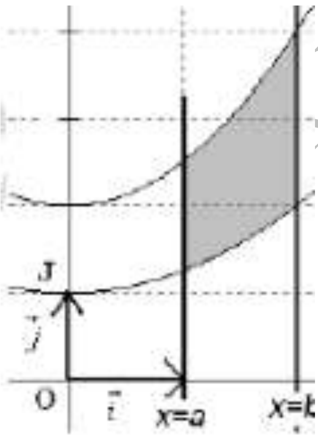
Dans la configuration ci-dessus, l'aire du domaine D délimité par l'axe des abscisses, C_f et les droites $(D): x = a$ et $(D'): x = b$ exprimée en u.a est :

$$\mathcal{A}(D) = \left(-\int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^b f(x)dx\right) u.a.$$

2. Aire du domaine délimité par C_f, C_g et les droites $(D): x = a$ et $(D'): x = b$

a. Cas où C_f est au-dessus de C_g sur $[a; b]$

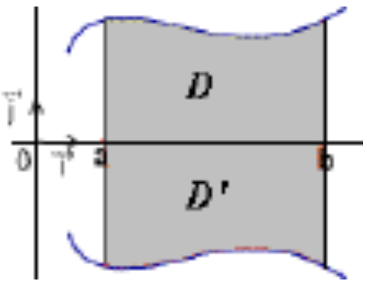
Si C_f est au-dessus de C_g sur $[a; b]$ (autrement dit si pour tout $x \in [a; b], f(x) \geq g(x)$) alors l'aire du domaine D délimité par C_f, C_g et les droites $(D): x = a$ et $(D'): x = b$ exprimée en u.a est $\mathcal{A}(D) = (\int_a^b (f(x) - g(x))dx\ ) u.a$



Dans le cas ci-dessus, le domaine D délimité par C_f, C_g et les droites $(D): x = a$ et $(D'): x = b$ est aussi l'ensemble des points $M\binom{x}{y}$ tels que $a \leq x \leq b$ et $g(x) \leq y \leq f(x)$.

b. Cas où C_f est en dessous de C_g sur $[a; b]$

Si C_f est en dessous de C_g sur $[a;b]$ (autrement dit si pour tout $x \in [a;b], f(x) \leq g(x)$) alors l'aire du domaine D délimité par C_f, C_g et les droites $(D): x = a$ et $(D'): x = b$ exprimée en u.a est $\mathcal{A}(D) = (\int_a^b (g(x) - f(x))dx\ )\ u.a$



Dans le cas ci-dessus, le domaine D délimité par C_f, C_g et les droites $(D): x = a$ et $(D'): x = b$ est aussi l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$.

Remarque

Si l'unité graphique du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est de p cm où p est un réel positif alors une unité d'aire peut être exprimée en cm^2 et on a : $1\ u.a = \text{p}^2\ cm^2$. Dans ce cas, l'aire d'un domaine en cm^2 est l'aire de ce domaine en u.a multipliée par p^2.

3. **Calcul de volumes**

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe C_f sur $[a;b]$ d'un tour complet autour de l'axe des abscisses est $V = (\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx) \times\ u.v$ où $1\ u.v = \text{p}^3\ cm^3$ si l'unité graphique du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est p cm.

CHAPITRE 13: Equations différentielles linéaires

Introduction: Les équations différentielles tirent leur origine dans la résolution de problèmes de physique et de mécanique proposés par les physiciens aux mathématiciens. Elles se sont développées au fil des années et se sont détachées de la physique pour rester une théorie plus mathématique. Elles sont utilisées dans plusieurs domaines tels que : la géométrie différentielle, la démographie, la chimie, la biologie, la physique, …..

I. Notion d'équations différentielles

1. Activité

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = e^{-2x}$ et $g(x) = \cos 3x$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) + 2f(x) = 0$.

2. Montrer que tout $x \in \mathbb{R}, g''(x) + 9g(x) = 0$.

Exploitation de l'activité

D'après **1.** , la fonction f vérifie l'égalité $f' + 2f = 0$. On dit que f est solution de l'équation $y' + 2y = 0$ d'inconnue y (y étant une fonction de la variable x) dite équation différentielle.

D'après **2),** g vérifie l'égalité $g'' + 9g = 0$. On dit que g est solution de l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$.

2. Définition et vocabulaire

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction et dans laquelle figure au moins l'une des dérivées successives de la fonction inconnue.

Dans une équation différentielle, la fonction inconnue est souvent notée par la variable y, sa dérivée première est notée par y' et sa dérivée seconde est notée par y'' etc….

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (respectivement dans un intervalle I) une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (respectivement définies sur I) qui sont solutions de l'équation différentielle.

Dans une équation différentielle, s'il n'y a que y' qui apparaît (avec seulement y ou même sans y) alors on dit qu'on a une équation différentielle du premier ordre.

Dans une équation différentielle, s'il apparaît y'' (avec seulement y' ou y ou même sans les deux) alors on dit qu'on a une équation différentielle du second ordre.

3. Exemples

✓ L'équation $y' + 2y = 0$ est une équation différentielle du premier ordre.

✓ L'équation $y'' + 9y = 0$ est une équation différentielle du second ordre.

II. Equations différentielles linéaires homogènes (sans second membre)

1. Equations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants

a. Définition

Toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme $y' + ay = 0$ avec a un réel constant non nul est dite équation différentielle linéaire homogène (ou sans second membre) du premier ordre à coefficients constants.

b. Exemple

Les équations différentielles $y' + 2y = 0$ $(a = 2)$ et $2y' - y = 0$ $(a = -\frac{1}{2})$ sont des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants.

c. Méthode de résolution

i. Théorème

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = ke^{-ax}$ où k est un réel constant.

Preuve

$y' + ay = 0 \Leftrightarrow (y' + ay)e^{ax} = 0 \Leftrightarrow y'e^{ax} + ae^{ax}y = 0$ or $(ye^{ax})' = y'e^{ax} + ae^{ax}y$ donc $y' + ay = 0 \Leftrightarrow (ye^{ax})' = 0$ donc la fonction ye^{ax} a une dérivée nulle donc c'est une fonction constante par suite il existe un réel constant k tel que $ye^{ax} = k$ d'où

$y' + ay = 0 \Leftrightarrow ye^{ax} = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{e^{ax}} = ke^{-ax}$ Ainsi on a $y' + ay = 0 \Leftrightarrow y = ke^{-ax}$.

ii. Exemples

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes: $y' - 3y = 0$ et $2y' + y = 0$.

- ✓ Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - 3y = 0$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = ke^{3x}$ avec k un réel constant.
- ✓ $2y' + y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{2}y = 0$. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$ avec k un réel constant.

d. Solution vérifiant une condition initiale donnée

i. Propriété

Soit x_0 et y_0 des réels constants donnés. Parmi toutes les fonctions f de la forme $f(x) = ke^{-ax}$, solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$, il existe une unique fonction g qui prend la valeur y_0 en x_0 i.e $g(x_0) = y_0$.

ii. Exemple

Déterminons l'unique solution dans $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 en 0 de l'équation différentielle $y' - 3y = 0$.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - 3y = 0$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = ke^{3x}$ avec k un réel constant. Parmi toutes ces solutions, il y a une unique solution qui prend la valeur 1 en 0. Déterminons-la. Soit g cette solution

On a donc $\begin{cases} g(x) = ke^{3x} \\ g(0) = 1 \end{cases}$. Comme $g(x) = ke^{3x}$ alors $g(0) = k$ par suite $g(0) = k = 1$ donc $k = 1$ d'où $g(x) = e^{3x}$. Ainsi la fonction g telle que $g(x) = e^{3x}$ est la seule solution qui prend la valeur 1 en 0, de l'équation différentielle $y' - 3y = 0$.

e. Remarque

$f(x) = ke^{-ax}$ avec k un réel constant non nul est dite la solution générale de l'équation différentielle $y' + ay = 0$.

2. Equations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants

a. Définition

Toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme $y" + ay' + by = 0$ avec a et b des réels constants non tous nuls est dite équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.

b. Exemples

L'équation $y'' + 9y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants où $a = 0$ et $b = 9$.

L'équation différentielle $y" + 2y' + 3y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants où $a = 2$ et $b = 3$.

c. Equation caractéristique d'une équation différentielle du second ordre

i. Définition

L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y" + ay' + by = 0$ est l'équation du 2nd degré d'inconnue r suivante : $r^2 + ar + b = 0$.

ii. Exemple

L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y" + 2y' + 3y = 0$ est l'équation

$r^2 + 2r + 3 = 0$.

d. Méthode de résolution

Soient $y" + ay' + by = 0$, $r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique et Δ le discriminant de $r^2 + ar + b = 0$.

i. Théorème (admis)

- ✓ Si $\Delta = 0$ alors $r^2 + ar + b = 0$ a une solution double notée r_0 et les solutions dans $\mathbb{R}$ de $y" + ay' + by = 0$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$ où A et B sont des réels constants. Dans ce cas, $f(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$ est dite la solution générale de l'équation $y" + ay' + by = 0$.

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y" + 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique de $y" + 2y' + y = 0$ est $r^2 + 2r + 1 = 0$ et on a : $\Delta = 0$ donc

$r_0 = -1$. Ainsi, les solutions dans $\mathbb{R}$ de $y" + 2y' + y = 0$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = (Ax + B)e^{-x}$ où A et B sont des réels constants.

- ✓ Si $\Delta > 0$ alors $r^2 + ar + b = 0$ a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y" + ay' + by = 0$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où A et B sont des réels constants. Dans ce cas,

$f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ est dite la solution générale de l'équation $y" + ay' + by = 0$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y" + y' - 6y = 0$

L'équation caractéristique de $y" + y' - 6y = 0$ est $r^2 + r - 6 = 0$ et on a : $\Delta = 25$ donc

$r_1 = 2$ et $r_2 = -3$. Ainsi, les solutions dans $\mathbb{R}$ de $y" + y' - 6y = 0$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x}$ où A et B sont des réels constants.

- ✓ Si Δ< 0 alors $r^2 + ar + b = 0$ a deux solutions complexes conjuguées $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$ et dans ce cas les solutions dans ℝ de l'équation différentielle $y" + ay' + by = 0$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$ avec A et B des réels constants. Dans ce cas, $f(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$ est dite la solution générale de l'équation $y" + ay' + by = 0$.

Exemple : Résolvons dans ℝ l'équation différentielle $y" - 4y' + 13y = 0$.

L'équation caractéristique de $y" - 4y' + 13y = 0$ est $r^2 - 4r + 13 = 0$ et on a : $\Delta' = -9 = (3i)^2$ donc les racines carrées de Δ' sont $3i$ et $-3i$ donc $r_1 = \frac{-b'+\delta'}{a} = 2 + 3i$ et $r_2 = 2 - 3i$

Ainsi $\alpha = 2$ et $\beta = 3$ donc les solutions dans ℝ de $y'' - 4y' + 13 = 0$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = (A\cos 3x + B\sin 3x)\, e^{2x}$ où A et B sont des réels constants.

III. Equations différentielles linéaires à coefficients constants avec second membre

1. Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants avec second membre

a. Définition

Toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme $y' + ay = g(x)$ où a est un réel constant et g une fonction différente de la fonction nulle est dite équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

b. Exemple

L'équation $y' + 2y = x^2 + 3x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

c. Méthode de résolution

Soient (E): $y' + ay = g(x)$, (E'): $y' + ay = 0$ et **h une solution particulière de (E) connue.**

i. Théorème

Une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E').

Preuve

La démonstration d'une proposition comportant **si et seulement si** se fait souvent en 2 étapes.

1ère étape : On va montrer que si f est solution de (E) alors $f - h$ est solution de (E').

Pour ce, supposons donc que f est solution de (E) et montrons que $f - h$ est solution de (E′).

$$(f-h)' + a(f-h) = f' - h' + a(f-h)$$

$$= \underbrace{f' + af}_{g} - \underbrace{(h' + ah)}_{g}$$

$$= g - g$$

$(f-h)' + a(f-h) = 0$ car par hypothèse de la 1ère étape, f est solution de (E) et h est une solution particulière de (E) connue d'où $f - h$ est solution de (E′): $y' + ay = 0$.

2ème étape : On va montrer que si $f - h$ est solution de (E′) alors f est solution de (E).

Supposons donc $f - h$ est solution de (E′) et montrons que f est solution de (E).

Comme $f - h$ est solution de (E′) donc $(f-h)' + a(f-h) = 0$

$$(f-h)' + a(f-h) = 0 \Rightarrow f' - h' + af - ah = 0$$

$$\Rightarrow f' + af - (h' + ah) = 0$$

$$\Rightarrow f' + af = \underbrace{h' + ah}_{g}$$

$$\Rightarrow f' + af = g$$

car h est une solution particulière connue de (E). Ainsi f est solution de (E). **Fin de la preuve**

ii. Conséquence du théorème

Si h une solution particulière connue de (E): $y' + ay = g(x)$ alors les solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions f de la forme $f(x) = h(x) + ke^{-ax}$ avec k un réel constant.

Preuve

Supposons que h une solution particulière connue de (E): $y' + ay = g(x)$. Soit f la solution générale de (E). D'après le théorème précédent, $f - h$ est une solution de (E′): $y' + ay = 0$. Or les solutions de (E') sont les fonctions de la forme ke^{-ax} avec k un réel constant donc $(f-h)(x) = ke^{-ax}$ d'où $f(x) - h(x) = ke^{-ax}$. Par suite $f(x) = h(x) + ke^{-ax}$.

2. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

a. Définition

Toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme $y'' + ay' + by = g(x)$ où a et b sont des réels constants et g une fonction différente de la fonction nulle est dite équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.

b. Exemple

L'équation $y'' - 3y' + 5y = \frac{e^{3x}}{2}$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.

c. Méthode de résolution

Soient (E): $y'' + ay' + by = g(x)$, (E′): $y'' + ay' + by = 0$ et **h une solution particulière de (E) connue.**

i. Théorème

Une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E′).

Preuve

1ère étape : On va montrer que si f est solution de (E) alors $f - h$ est solution de (E′).

Pour ce, supposons donc que f est solution de (E) et montrons que $f - h$ est solution de (E′).

$$(f-h)'' + a(f-h)' + b(f-h) = f'' - h'' + a(f' - h') + bf - bh$$

$$= \underbrace{f'' + af' + bf}_{g} - \underbrace{(h'' + ah' + bh)}_{g}$$

$$= g - g$$

$(f-h)'' + a(f-h)' + b(f-h) = 0$ car par hypothèse de la 1ère étape, f est solution de (E) et h est une solution particulière de (E) connue d'où $f - h$ est solution de (E′).

2ème étape : On va montrer que si $f - h$ est solution de (E′) alors f est solution de (E).

Supposons donc $f - h$ est solution de (E′) et montrons que f est solution de (E).

Comme $f - h$ est solution de (E′) donc $(f-h)'' + a(f-h)' + b(f-h) = 0$

$$(f-h)'' + a(f-h)' + b(f-h) = 0 \Rightarrow f'' - h'' + a(f' - h') + bf - bh = 0$$

$$\Rightarrow f'' + af' + bf - (h'' + ah' + bh) = 0$$

$$\Rightarrow f'' + af' + bf = \underbrace{h'' + ah' + bh}_{g}$$

$$\Rightarrow f'' + af' + bf = g$$

car h est une solution particulière connue de (E). Ainsi f est solution de (E). **Fin de la preuve**

ii. Conséquence du théorème

Si h une solution particulière connue de (E): $y'' + ay' + by = g(x)$ alors les solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions f de la forme $f(x) = h(x) + p(x)$ où p est la solution générale de l'équation (E′): $y'' + ay' + by = 0$.

Preuve

Supposons que h une solution particulière connue de (E): $y'' + ay' + by = g(x)$. Soit f la solution générale de (E). D'après le théorème précédent, $f - h$ est une solution de

(E′): $y'' + ay' + by = 0$ donc $f - h = p$ où p est la solution générale de (E'). Ainsi $(f - h)(x) = p(x)$ donc $f(x) - h(x) = p(x)$. Par suite $f(x) = h(x) + p(x)$.

CHAPITRE 14 : Statistiques

Quelle est la différence entre les statistiques et la statistique ?

Réponse :

Les statistiques désignent des chiffres qui décrivent un phénomène. Par exemple, on parle des statistiques du bac 2021, les statistiques des accidents de la circulation, les statistiques des enfants de la rue….. tandis que la statistique est une science qui a pour objet la collecte de données à travers des enquêtes, l'organisation, l'analyse et l'interprétation de ces données. Une interprétation rigoureuse de données peut conduire à une prise de décision.

La statistique est aujourd'hui utilisée dans pas mal de domaine comme en démographie….

I. Série statistique à deux variables

1. Vocabulaire de base

- Une population (statistique) est un ensemble fini sur lequel on collecte des données. Elle peut être composée de personnes, d'animaux ou d'objets…
- Chaque élément d'une population statistique est dit individu ou unité statistique.

- Une variable (ou caractère) est une propriété étudiée ou une information recueillie sur chaque individu d'une population. Elle est souvent notée X ou Y ou Z….. et si ses valeurs sont des nombres réels alors elle est dite variable quantitative.

2. Série statistique double

Sur une population de 5 individus constitués d'hommes : I_1, I_2, I_3, I_4 et I_5, il est possible d'étudier simultanément deux variables par exemple : nombre de femmes (X) et nombre d'enfants (Y). La collecte des données pour les deux variables X et Y s'effectue comme suit :

Individus	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
X	$x_1 = 4$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 0$	$x_5 = 1$
Y	$y_1 = 20$	$y_2 = 6$	$y_3 = 20$	$y_4 = 1$	$y_5 = 6$

Pour l'individu I_1, on a un couple de données $(x_1; y_1) = (4; 20)$ où $x_1 = 4$ est la donnée fournie par I_1 relativement à la variable X (nombre de femmes) et $y_1 = 20$ est la donnée fournie par I_1 relativement à la variable Y (nombre d'enfants).

Pareil pour I_2, on a un couple de données $(x_2; y_2) = (1; 6)$ où $x_2 = 1$ est la donnée fournie par I_2 relativement à la variable X et $y_2 = 6$ est la donnée fournie par I_2 relativement à la variable Y. Ainsi de suite ….

L'ensemble des couples $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2); \ldots; (x_5, y_5)\}$ est dit série statistique double. Elle est notée (X, Y). Le tableau qui détermine la série double (X, Y) est :

X	$x_1 = 4$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 0$	$x_5 = 1$
Y	$y_1 = 20$	$y_2 = 6$	$y_3 = 20$	$y_4 = 1$	$y_5 = 6$

Remarque : Il y a deux couples identiques : $(x_2, y_2) = (x_5, y_5) = (1; 6)$ (ce qui veut dire que les individus I_2 et I_5 ont donné les mêmes informations relativement aux variables X et Y). Dans ce cas, on peut organiser les données à partir d'un tableau à double entrée dit tableau de contingence ou tableau de corrélation.

Les modalités de la variable X sont donc : $x_1 = 4$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$ et $x_4 = 0$ et celles de Y sont : $y_1 = 20$; $y_2 = 6$ et $y_3 = 1$ et le tableau de contingence de la série (X, Y) est :

X \ Y	**4**	**1**	**2**	**0**	**Totaux**
20	1	0	1	0	$\mathbf{n_{.1} = 2}$

6	0	2	0	0	$\mathbf{n_{.2} = 2}$
1	0	0	0	1	$\mathbf{n_{.3} = 1}$
Totaux	$\mathbf{n_{1.} = 1}$	$\mathbf{n_{2.} = 2}$	$\mathbf{n_{3.} = 1}$	$\mathbf{n_{4.} = 1}$	$\mathbf{N = 5}$

- Le nombre **2** est dit effectif du couple (1, 6). Il signifie qu'il y a 2 hommes qui ont 1 femme et 6 enfants. Il est noté n_{22}.
- Le nombre **0** situé sur de la 2ème ligne et la 3ème colonne est dit effectif du couple (1, 20). Il signifie qu'il n'y a pas d'homme qui a 1 femme et 20 enfants. Il est noté n_{21}.
- $n_{1.} = n_{11} + n_{12} + n_{13} = \sum_{j=1}^{3} n_{1j} = 1 + 0 + 0 = 1$ est le nombre d'hommes ayant 4 femmes. Il est dit effectif partiel marginal.
- $n_{.2} = n_{12} + n_{22} + n_{32} + n_{42} = \sum_{i=1}^{4} n_{i2} = 0 + 2 + 0 + 0 = 2$ est le nombre d'hommes ayant 6 enfants. Il est dit effectif partiel marginal.

L'effectif total ou le nombre d'hommes est :

- $N = n_{1.} + n_{2.} + n_{3.} + n_{4.} = \sum_{i=1}^{4} n_{i.} = 1 + 2 + 1 + 1 = 5$

  Ou bien
- $N = n_{.1} + n_{.2} + n_{.3} = \sum_{j=1}^{3} n_{.j} = 2 + 2 + 1 = 5$

  Ou bien encore
- $N = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} n_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} n_{ij}$
- La fréquence du couple $(x_i; y_j)$ notée f_{ij} est $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$. Par exemple la fréquence du couple (1, 6) est $f_{22} = \frac{n_{22}}{N} = \frac{2}{5} = 0{,}4$. Cette fréquence en pourcentage est 40%.

II. Séries marginales et séries conditionnelles

1. Séries marginales

a. 1ère série marginale

Dans le tableau de contingence ci-dessus, la série statistique simple $\{(x_i\,;\, n_{i.}) : 1 \leq i \leq 4\}$ où $n_{i.}$ est l'effectif partiel marginal de x_i c'est-à-dire la somme des effectifs partiels contenus dans la colonne x_i est dite série marginale associée à la variable X ou encore la 1ère série marginale. Elle est présentée à l'aide du tableau suivant.

X	4	1	2	0	**Total**
$n_{i.}$	1	2	1	1	**5**

La fréquence marginale de x_i avec $1 \leq i \leq 4$, notée $f_{i.}$ est $f_{i.} = \frac{n_{i.}}{N}$. Par exemple $f_{1.} = \frac{n_{1.}}{N} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

c. 2ème série marginale

Dans le tableau de contingence ci-dessus, la série statistique simple $\{(y_j;\ n_{.j}): 1 \leq j \leq 3\}$ où $n_{.j}$ est l'effectif partiel marginal y_j est dite série marginale associée à la variable Y ou encore la 2ème série marginale. Elle est présentée à l'aide du tableau suivant :

Y	20	6	1	**Total**
$n_{.j}$	2	2	1	**5**

La fréquence marginale de y_j :$1 \leq j \leq 3$, notée $f_{.j}$ est $f_{.j} = \frac{n_{.j}}{N}$. Par exemple $f_{.2} = \frac{n_{.2}}{N} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

2. Valeurs caractéristiques d'une série double

Considérons la série marginale X de l'exemple ci-dessus définie par le tableau suivant :

X	4	1	2	0	**Total**
$n_{i.}$	1	2	1	1	**5**

Les effectifs partiels de cette série marginale sont : $n_{1.} = 1;\ n_{2.} = 2;\ n_{3.} = 1;\ n_{4.} = 1$.

- La moyenne de la série marginale X notée $\bar{x}$ est égale :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(n_{1.}x_1 + n_{2.}x_2 + n_{3.}x_3 + n_{4.}x_4) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{4} n_{i.}x_i = \frac{1}{5} \times 8 = 1{,}6.$$

Plus généralement, on a : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_{i.}x_i$ où $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$ sont les modalités de X.

- La variance de la série marginale X notée V(X) est définie par : $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{4} n_{i.}(x_i - \bar{x})^2$.

  Elle est aussi égale à $V(X) = (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{4} n_{i.}{x_i}^2) - \bar{x}^2$ dite formule de Koenig.

On a donc $V(X) = \frac{1}{N}(n_{1.}{x_1}^2 + n_{2.}{x_2}^2 + n_{3.}{x_3}^2 + n_{4.}{x_4}^2) - \bar{x}^2 = 1{,}84$

Plus généralement, on a : $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_{i.}(x_i - \bar{x})^2 = (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_{i.}{x_i}^2) - \bar{x}^2$ où $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$ sont les modalités de X.

- L'écart type de la série marginale X notée σ_X est égal :

  $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,84} \cong 1,4$

Le tableau suivant définie la série marginale Y

Y	20	6	1	**Total**
$n_{.j}$	2	2	1	**5**

- La moyenne $\bar{y}$ da la série marginale Y est égale :

  $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} n_{.j}y_j = \frac{1}{5}(n_{.1}y_1 + n_{.2}y_2 + n_{.3}y_3) = \frac{1}{5} \times 53 = 10,6$

Plus généralement, on a : $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{p} n_{.j}y_j$ où $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p$ sont les modalités de Y.

- La variance V(Y) de la série marginale Y est définie par : $V(Y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} n_{.j}(y_j - \bar{y})^2$. Elle est aussi égale à $V(Y) = (\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} n_{.j}{x_j}^2) - \bar{y}^2$ dite formule de Koenig.

On a donc $V(Y) = \frac{1}{N}(n_{.1}{y_1}^2 + n_{.2}{y_2}^2 + n_{.3}{y_3}^2) - \bar{y}^2 = 62,24$

Plus généralement, on a : $V(Y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{p} n_{.j}(y_j - \bar{y})^2 = (\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{p} n_{.j}{y_j}^2) - \bar{y}^2$ où $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p$ sont les modalités de Y.

- L'écart type de la série marginale Y notée σ_Y est égal :

  $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{62,24} \cong 7,9$

- La covariance de X et Y notée Cov(X, Y) est égale à :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}x_iy_j - (\bar{x} \times \bar{y}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} n_{ij}x_iy_j - (\bar{x} \times \bar{y})$$

La covariance peut se calculer à l'aide du tableau de contingence comme suit :

Y \ X	**4**	**1**	**2**	**0**	$\sum_{i=1}^{4} \mathbf{n_{ij}x_iy_j}$
20	1	0	1	0	$\mathbf{(1 \times 4 \times 20) + (1 \times 2 \times 20) = 120}$
6	0	2	0	0	$\mathbf{2 \times 1 \times 6 = 12}$
1	0	0	0	1	**0**

$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} n_{ij}x_iy_j$	$\mathbf{120 + 12 + 0 = 132}$

$\text{Cov}(X,Y) = \frac{132}{5} - (1{,}6 \times 10{,}6) = 9{,}44$

Plus généralement, on a : $\text{Cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} n_{ij}x_iy_j - (\bar{x} \times \bar{y})$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m} n_{ij}x_iy_j - (\bar{x} \times \bar{y})$$

Où $x_1, x_2, \dots, x_m$ sont les modalités de X et $y_1, y_2, \dots, y_p$ sont les modalités de Y.

- Le coefficient de corrélation linéaire de la série double (X, Y) noté r est égal à $r = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \times \sigma_Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}}$. On a toujours : $-1 \leq r \leq 1$. Par exemple le coefficient de corrélation de la série ci-dessus est $r = \frac{9{,}44}{1{,}4 \times 7{,}9} \cong 0{,}9$

NB : Dans les calculs ci-dessus, tous les résultats non exacts sont arrondis à un chiffre après la virgule.

3. Séries conditionnelles

a. Définitions

Dans une série double (X, Y) où les modalités de X sont $x_1; \dots; x_m$ et celles de Y sont $y_1; \dots; y_p$:

✓ La série conditionnelle X sachant que $Y = y_j$ avec $1 \leq j \leq p$ notée $X/Y = y_j$ peut être définie par le tableau suivant obtenu en choisissant les parmi les x_i celles pour lesquelles $n_{ij} \neq 0$.

$X/Y = y_j$	x_1	$\dots$	x_m	Total
n_{ij}	n_{1j}	$\dots$	n_{mj}	$n_{.j}$

Dans cette série conditionnelle, la fréquence conditionnelle de x_i ($n_{ij} \neq 0$) sachant que $Y = y_j$ notée f_{x_i/y_j} est $f_{x_i/y_j} = \frac{n_{ij}}{n_{.j}}$

✓ La série conditionnelle Y sachant que $X = x_i$ avec $1 \leq i \leq m$ notée ${}^{Y}/_{X = x_i}$ peut être définie par le tableau suivant en choisissant parmi les y_j celles pour lesquelles $n_{ij} \neq 0$.

${}^{Y}/_{X = x_i}$	y_1	$\dots$	y_p	Total
n_{ij}	n_{i1}	$\dots$	n_{ip}	$n_{i.}$

Dans cette série conditionnelle, la fréquence conditionnelle de y_j sachant que $X = x_i$ notée $f_{y_{j/x_i}}$ est $f_{y_{j/x_i}} = \frac{n_{ij}}{n_{i.}}$

b. Exemple

Soit la série double (X, Y) où les modalités de X sont : $x_1 = 4$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$ et $x_4 = 0$ et celles de Y sont : $y_1 = 20$; $y_2 = 6$ et $y_3 = 1$.

La série conditionnelle X sachant que $Y = 20$ notée ${}^{X}/_{Y = 20}$ est définie par le tableau suivant :

${}^{X}/_{Y = 20}$	4	2	**Total**
n_{i1}	1	1	**2**

Dans cette série conditionnelle, la fréquence conditionnelle de 4 sachant que $Y = 20$ notée $f_{4/20}$ est $f_{4/20} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

✓ La série conditionnelle Y sachant que $X = 1$ notée ${}^{Y}/_{X = 1}$ peut être définie par le tableau suivant :

${}^{Y}/_{X = 1}$	6	**Total**
n_{2j}	2	**2**

Dans cette série conditionnelle, la fréquence conditionnelle de 6 sachant que $X = 1$ notée $f_{6/1}$ est $f_{6/1} = \frac{2}{2} = 1$.

c. Remarque

$f_{ij} = f_{x_{i/y_j}} \times f_{.j} = f_{y_{j/x_i}} \times f_{i.}$

III. Représentation graphique et ajustement linéaire

1. Nuage de points

Soit une série double (X, Y) telles que les modalités de X sont $x_1, \dots, x_m$ et celles de Y sont $y_1, \dots, y_p$. Dans un repère orthogonal, l'ensemble des points $M_{ij}\binom{x_i}{y_j}$ tels que l'effectif n_{ij} du couple $(x_i; y_j)$ soit non nul est dit nuage de points de la série (X, Y). Au-dessus de chacun de ces points M_{ij}, on précise l'effectif n_{ij}.

2. Exemple

Pour notre série (X, Y) ci-dessus, le nuage de points est : $\{M_1(4;\ 20); M_2(1;\ 6);\ M_3(2;\ 20);\ M_4(0;\ 1)\}$. Représentons le nuage de points de la série double de notre exemple ci-dessus.

Echelle : 1 cm→ 1 sur l'axe des abscisses et 0,5 cm→1 sur l'axe des ordonnées.

3. Point moyen

Dans un orthogonal, le point $G\binom{\bar{x}}{\bar{y}}$ où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ désignent respectivement les moyennes des séries marginales X et Y est dit point moyen. On le représente dans le nuage de points.

4. Ajustement linéaire

Si le nuage de points d'une série double a une forme allongée (c'est-à-dire si les points semblent se situer autour droite) alors on peut tracer une droite qui passe le plus près possible de « tous les points » du nuage. On dit qu'on a effectué un ajustement linéaire du nuage et cette droite tracée est dite droite d'ajustement. Il existe 3 types d'ajustement linéaire : ajustement linéaire à main levée, ajustement linaire par la méthode de Mayer et ajustement linéaire par la méthode des moindres carrées.

a. Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés permet de déterminer une droite qui passe le plus près possible des points du nuage. Une telle droite est dite droite de régression. On démontre qu'il y a deux droites de régression :

- Droite de régression de Y en X notée $D_{Y/X}$ d'équation $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$ où $a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(X)}$
- Droite de régression de X en Y notée $D_{X/Y}$ d'équation $x - \bar{x} = a'(y - \bar{y})$ où $a' = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(Y)}$

b. Propriétés

- Le point moyen $G\binom{\bar{x}}{\bar{y}}$ appartient à chacune des deux droites de régression.
- Le coefficient de corrélation linéaire r est tel que $r^2 = aa'$. En effet $r^2 = \left(\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \times \sigma_Y}\right)^2 = \frac{\text{Cov}(X,Y)\times\text{Cov}(X,Y)}{(\sigma_X)^2\times(\sigma_Y)^2} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{(\sigma_X)^2} \times \frac{\text{Cov}(X,Y)}{(\sigma_Y)^2} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(X)} \times \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(Y)} = aa'$.
- Si $|r| \geq 0{,}87$ ou si $r^2 \geq 0{,}75$ alors on dit que la corrélation linéaire entre X et Y est bonne ou bien on dit qu'un ajustement linéaire se justifie et dans ce cas, la droite de régression $D_{Y/X}$ permet de faire une estimation de la valeur de Y connaissant celle de X et la droite de régression $D_{X/Y}$ permet de faire une estimation de la valeur de X connaissant celle de Y.
- Si $|r| < 0{,}87$ ou si $r^2 < 0{,}75$ alors on dit que la corrélation linéaire entre X et Y est faible ou bien on dit qu'un ajustement linéaire n'est pas justifié.

c. Remarques

- ✓ On ne fait pas une estimation de la valeur de Y connaissant celle de X en utilisant la droite de régression $D_{X/Y}$ mais on doit nécessairement utiliser la droite de régression $D_{Y/X}$.
- ✓ On ne fait pas une estimation de la valeur de X connaissant celle de Y en utilisant la droite de régression $D_{Y/X}$ mais on doit nécessairement utiliser la droite de régression $D_{X/Y}$.

IV. Série statistique double injective

1. Définition

Si les variables X et Y d'une série double (X, Y) ont le même nombre de modalités n et l'effectif n_{ij} du couple (x_i, y_j) est tel que $n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ alors la série double (X, Y) est dite injective.

Autrement dit, une série double (X, Y) est injective si elle peut être définie par un tableau de la forme :

X	x_1	x_2	…..	x_n
Y	y_1	y_2	……	y_n

Où les colonnes sont toutes différentes.

2. Propriétés

L'effectif total N d'une série double injective est égale au nombre de colonnes du tableau ou au nombre de modalités de la variable X ou celui de Y.

Toutes les formules déjà vues ci-dessus se simplifient dans le cas d'une série injective et on a :

- La moyenne $\bar{x}$ de la série marginale X est $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ et celle de la série marginale Y est $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$.
- La variance de la série marginale X est $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i{}^2) - \bar{x}^2$ et celle de la série marginale Y est $V(Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2 = (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i{}^2) - \bar{y}^2$.
- La covariance de X et Y est $Cov(X, Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - (\bar{x} \times \bar{y})$.

FIN du programme