

AVRIL 2024

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES
STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, $\ln$ désigne le logarithme népérien, e le nombre de Néper, R l'ensemble des nombres réels, C l'ensemble des nombres complexes et N l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application f définie sur R^+ par : $f(x) = x^2 \ln(x) - \frac{x^2}{2}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en zéro.
2. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.
3. Calculer $I = \int_1^e f(x) dx$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions sur R^+ dont l'une est comprise entre $\sqrt{e}$ et e .

Exercice n° 2

Soit la fonction g définie sur R^+ par : $g(x) = e^{-2x} (2x^2 + 1)$.

1. Etudier les variations de g et tracer son graphe.
2. Etudier la convexité de g .
3. Calculer $I = \int_0^1 g(x) dx$.

Exercice n° 3

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé. On note A le point de P d'affixe $2i$.

Soit $f: P - \{A\} \rightarrow P$ définie par : $f(z) = \frac{z+1}{z-2i}$.

1. Déterminer l'ensemble E des points de P dont l'image par f est un nombre réel non nul.
2. Déterminer l'ensemble F des points de P dont l'image par f a pour affixe un nombre imaginaire pur non nul.

Exercice n° 4

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Une entreprise de location de voitures particulières propose à sa clientèle deux tarifs :

Tarif A : prise en charge 60 dollars par jour et prix unitaire au km : 0,40 dollar.

Tarif B : prise en charge 80 dollars par jour et prix unitaire au km : 0,30 dollar.

Un automobiliste va effectuer un voyage d'affaires de 3 jours.

Déterminer le tarif le plus avantageux pour l'automobiliste en fonction du nombre de kilomètres parcourus.

2. La fonction d'offre Q exprime la quantité produite q d'un bien en fonction de son prix p :

$$q = Q(p) \text{ où } Q(p) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 < p < 2 \\ 8(6-p)^{-1/2} & \text{si } 2 \leq p < 5 \\ (p-3)^3 & \text{si } p \geq 5 \end{cases}$$

Etudier la continuité et la convexité de Q sur chaque intervalle (de la définition) et tracer son graphe.

Exercice n° 5

Une urne contient 8 boules numérotées : 3 boules portent le chiffre 1, 3 boules le chiffre 2, 1 boule le chiffre 3 et 1 boule le chiffre 4. On tire au hasard simultanément deux boules et on note x et y les deux chiffres obtenus.

On considère la variable aléatoire X définie par : $X = |x - y|$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

2. Calculer la variance de X .

3. Soit la variable aléatoire $Y = -2X + 1$. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice n° 6

Pour n entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}$.

1. Etudier les variations de f_n selon les valeurs de n .

2. Tracer le graphe de f_1 et celui de f_2 .

3. Soit $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

- Calculer I_1 et I_2 .

- Calculer I_n pour tout n (on distinguera selon que n est pair ou impair).