

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG /
ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, L_n désigne le logarithme népérien, e le nombre de Néper, R l'ensemble des nombres réels, C l'ensemble des nombres complexes et N l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application f définie sur R par : $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

1. Etudier les variations et la convexité de f .
2. Tracer le graphe de f .
3. Le graphe de f admet-il un centre de symétrie ?
4. Calculer $I_n = \int_0^1 \frac{x^n - 1}{x^2 + 1} dx$, pour tout $n \in N^*$.

Exercice n° 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in N}$ définie par : $u_0 = 1$ et la relation de récurrence:

$$(3 + u_n)u_{n+1} + 1 = 0.$$

1. Calculer u_1 et u_2 . Montrer que la suite est monotone.
2. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in N}$ et déterminer sa limite si elle existe.
3. Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente.

Exercice n° 3

On considère la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls par :

$$g(x) = \cos(\sqrt{-x})$$

et la fonction h définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$h(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

1. Etudier les variations de h et tracer son graphe (on précisera la pente de la demie tangente en zéro).

2. Calculer $I = \int_0^1 h(x) dx$

3. Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } x \leq 0 \\ h(x) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de f ainsi que de ses dérivées premières et secondes.

Exercice n° 4

On note $P = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$, où $\operatorname{Im}(z)$ désigne la partie réelle de z et $|z|$ son module. On considère l'application f définie sur \mathbb{C} par : $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

1. Montrer que f est une bijection de P sur D .

2. Déterminer le lieu géométrique des points d'affixe $f(z)$.

Exercice n° 5

On lance deux dés à 6 faces numérotées de 0 à 5. On effectue le produit des deux chiffres obtenus et on garde le chiffre des unités. On note X cette variable aléatoire. Par exemple si on obtient 3 et 4, le produit est égal à 12 et $X=2$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Calculer la probabilité que $X=0$.

3. Calculer la probabilité que X soit strictement supérieure à 4.

4. Sur ce jeu (lancement de ces deux dés), un joueur mise 10 euros.

La règle du jeu est la suivante :

- Si $X=0$, le joueur perd sa mise,
- Si X est pair et différent de zéro, le joueur gagne 2 euros,
- Si X est impair, non nul et strictement inférieur à 9, le joueur gagne 4 euros,
- Si $X=9$, le joueur gagne 60 euros.

Calculer l'espérance de gain pour ce jeu. Commenter le résultat obtenu.

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt, \text{ où } n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$$

1. Calculer u_1 .
2. Trouver une relation entre u_{n+1} et u_n , en déduire l'expression de u_n .
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.