

ÉCOLE NATIONALE
SUPÉRIEURE DE
STATISTIQUE ET
D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA
STATISTIQUE ET DE
L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
PIERRE NDIAYE
ENSAE - DAKAR

INSTITUT
SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET
D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2023
CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG /
ANALYSTES STATISTICIENS
ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes et $\ln$ le logarithme népérien.

Exercice 1

1. Calculer $\int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$.
2. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \frac{x \sin x - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$.
3. Donner le comportement au voisinage de $x = 1$ de la même fonction.
4. Écrire le nombre complexe $z = 2 - 2i$ sous forme trigonométrique.
5. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \tan(x/2) \cos(2x),$$

expliquez quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f .

6. Dériver la fonction définie à la question précédente.

7. Dans un jeu opposant les joueurs A et B , on lance un dé équilibré. Si le dé tombe sur 5 ou 6, B réalise un score égal au résultat du lancer. Si le dé tombe sur 1, 2, 3 ou 4, A réalise un score égal à k fois le résultat du lancer. Quelle doit être la valeur de k pour que le score soit équitable, c'est-à-dire pour que la différence entre les scores soit d'espérance nulle ?
8. On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_0^2 + \dots + u_n^2}$ pour $n \geq 0$. Cette suite est-elle croissante ? Est-elle convergente ?
9. On considère la suite définie par $u_0 = 1/4$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1/4$ pour $n \geq 0$. Étudier la convergence de la suite (u_n) .
10. Résoudre l'équation $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.

Exercice 2 Dans cet exercice, on se donne un nombre réel a , et on considère l'application

$$f_a(x) = \exp(x^a \ln x)$$

1. Donner le domaine de définition de f_a , et calculer sa dérivée.
2. Montrer que toutes les courbes représentatives de f_a , $a \in \mathbf{R}$, ont un point commun, que l'on déterminera.
3. Étudier la branche infinie de f_a en $+\infty$ selon les valeurs de a .
4. Discuter, selon les valeurs de a , de la limite de f_a à droite de 0.
5. Discuter, selon les valeurs de a , de la limite de f'_a à droite de 0.
6. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
7. Dresser les tableaux de variations de f_a correspondant à tous les cas que vous avez distingués aux questions précédentes. On précisera notamment les valeurs des maximums et minimums locaux de f_a .
8. Représenter graphiquement sur une même figure les courbes représentatives correspondant à ces tableaux de variations. On précisera notamment les pentes des courbes au point d'abscisse 0.
9. Calculer $f_{-0,1}(10^{10})$ et commenter le résultat obtenu au vu des résultats précédents.

Exercice 3

1. On considère l'application f qui à tout nombre réel x associe $f(x) = x^3 - 2x - 1/2$.
 - (a) Calculer $f(-1)$, $f(-1/2)$, $f(0)$ et $f(1)$.
 - (b) Calculer la dérivée et dresser le tableau de variations de f .
 - (c) Dédire de ce qui précède que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement 3 solutions qu'on placera par rapport à -1 , $-1/2$, 0 et 1.
 - (d) Tracer la courbe représentative de f .
2. On considère désormais la fonction de la variable réelle

$$g : x \mapsto \frac{\tan x}{1 + 2 \cos x}.$$

- (a) Donner le domaine de définition de g .
- (b) Étudier la parité et la périodicité de g ; en déduire l'intervalle sur lequel vous allez étudier cette fonction.

- (c) Étudier les branches infinies de g .
- (d) Calculer la dérivée de g , et exprimer $g'(x)$ en fonction de $\cos x$.
- (e) En vous aidant des résultats de la question 1, montrer que g' s'annule une unique fois sur l'intervalle d'étude, en un point x_0 situé entre $\pi/2$ et $2\pi/3$.
- (f) Dresser le tableau de variations de g .
- (g) Donner l'allure de la courbe représentative de g .

Exercice 4 On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^n} dx.$$

- 1. Calculer I_0 et I_1 .
- 2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
- 3. Montrer que pour tout n ,

$$I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx.$$

- 4. Conclure quant à la convergence de I_n .
- 5. Montrer que

$$\ln 2 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)} dx.$$

- 6. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)} dx = 0$$

et en déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 5 On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1}$ pour tout $n \geq 0$.

- 1. (a) Montrer que $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{2n}$ pour tout entier $n \geq 1$.
- (b) En déduire que

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2n-2}}{n}}$$

et donner la limite de $u_n/\sqrt{n}$ quand $n \rightarrow \infty$.

- 2. (a) Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{n}.$$

- (b) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}.$$

- (c) Déduire des questions précédentes la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1}{\frac{u_{n-1}}{n}}.$$

3. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \sqrt{n} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6

On considère l'ensemble $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module égal à 1. Soit a un nombre complexe a tel que $|a| \neq 1$.

1. Montrer que l'application f_a donnée par

$$f_a(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}$$

est bien définie pour tout élément z de $\mathbf{U}$.

2. Montrer que, si $z \in \mathbf{U}$, alors $\bar{z} = 1/z$.

3. En déduire que si $z \in \mathbf{U}$, alors $f_a(z) \in \mathbf{U}$.

4. Réciproquement, montrer que tout élément t de $\mathbf{U}$ est l'image par f_a d'un unique élément z de $\mathbf{U}$ que l'on déterminera.

5. Déduire de ce qui précède que f_a est une bijection de $\mathbf{U}$ sur $\mathbf{U}$ et préciser sa bijection réciproque.

6. Donner l'ensemble des points z dont l'image par f_a appartient à l'ensemble $\{-1, 1, i, -i\}$ dans chacun des cas suivants :

- (a) $a = 2$;
- (b) $a = 2i$;
- (c) $a = 1 + i$.

Exercice 7

On joue suivant la règle suivante : on est en possession d'un pion initialement placé au point 0 sur une règle graduée ; à chaque lancer du dé, on avance de 3 cases si le résultat est un multiple de 3, et on recule de 2 cases dans le cas contraire. Le joueur ou la joueuse gagne si, au bout de 5 lancers, le pion est sur une case positive ou nulle.

- 1. Soit X_k la variable aléatoire égale à 3 si le résultat du k -ième lancer est un multiple de 3, et à -2 sinon. Donner la loi de X_k .
- 2. Pour tout entier k , on pose $Y_k = (X_k + 2)/5$. Donner la loi de Y_k ainsi que la loi de la variable

$$S = \sum_{k=0}^5 Y_k.$$

3. En déduire la probabilité de gagner à ce jeu.

4. Pouvez-vous étendre votre raisonnement :

- (a) au cas où on avance de 3 cases si le résultat est 6, et on recule de 2 cases dans le cas contraire ?
- (b) au cas où on gagne si le pion est sur une case positive après 10 lancers ?
Donner la probabilité de gain dans chacune de ces situations.