

ÉCOLE NATIONALE
SUPÉRIEURE DE
STATISTIQUE ET
D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA
STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE
ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

INSTITUT
SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET
D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2021
CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG /
ANALYSTES STATISTICIENS
ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, \mathbf{R} désigne l'ensemble des nombres réels, \mathbf{C} l'ensemble des nombres complexes et \ln le logarithme népérien. On rappelle les relations

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1 + \cos \theta}{2} \\ \sin \theta &= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

valables pour tout réel θ .

On rappelle enfin la limite classique :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Exercice 1

1. Calculer $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^2 x (\sin x) dx$.
2. Exprimer la dérivée de la fonction $f(x) = \frac{\sin x^3}{\cos x}$ comme une fonction de $\sin x$.
3. Donner la limite en $-\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1} + x$.

4. Donner le comportement au voisinage de $x = 0$ de la fonction $f(x) = \sin x \ln(x - x^2)$.
5. Ecrire le nombre complexe $z = -3 + 3i$ sous forme trigonométrique.
6. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \frac{2x}{e^x - e^{-x}},$$

expliquer quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f .

7. Une urne contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2. On tire au hasard uniforme et avec remise deux fois une boule, et on fait le produit X des chiffres obtenus. Pour toute valeur de k pertinente, donner la probabilité pour que X soit égal à k et en déduire l'espérance de X .
8. On considère la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 4)$. Cette suite est-elle monotone ? Est-elle convergente ?
9. En utilisant la double inégalité (qu'on ne cherchera pas à démontrer)

$$\frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}$$

valable pour tout entier $n > 0$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}.$$

10. Résoudre l'équation $x^3 + 6x^2 - x = 0$ dans \mathbf{R} , puis dans \mathbf{C} .

Exercice 2 Pour $a \in \mathbf{R}$, on considère la fonction de la variable réelle

$$f_a(x) = ax^3 - 3(a+1)x^2 + x + 1$$

1. Dans cette partie, on pose $a = -1/3$ et pour simplifier on note $f_{-1/3} = f$.
 - (a) Calculer f' , et en déduire les intervalles de croissance de f .
 - (b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que la valeur de $f(-2)$.
 - (c) Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement 3 solutions qu'on placera par rapport aux valeurs -2 , -1 et 0 .
 - (d) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. On suppose désormais a quelconque.
 - (a) Pour un point (x, y) tel que $x \neq \{0, 3\}$, montrer qu'il existe une unique valeur de a telle que $f_a(x) = y$ et donner la valeur de a .
 - (b) Pour y fixé, résoudre en a l'équation $f_a(3) = y$.

- (c) Dédurre de ce qui précède que toutes les courbes représentatives des fonctions f_a , $a \in \mathbf{R}$, passent par deux points M_1 et M_2 du plan dont on donnera les coordonnées.
- (d) Montrer que la tangente à la courbe de f_a au point d'abscisse $x = 0$ ne dépend pas de $a \in \mathbf{R}$.

Exercice 3 On considère la fonction de la variable réelle f définie par

$$f(x) = (x - 1)e^{\frac{2}{x}} \quad \text{pour } x \neq 0$$

1. Montrer que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{2}{x}} - 1 \right) = 2.$$

(on pourra utiliser le rappel donné au début de l'énoncé avant l'exercice 1)

2. Donner le domaine de définition de f , calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et étudier soigneusement ses éventuelles branches infinies.
3. Calculer la dérivée et dresser le tableau de variations de f .
4. Tracer la courbe représentative de f .
5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, si $t > 1$,

$$\int_1^t x e^{\frac{2}{x}} dx = \frac{t^2 e^{\frac{2}{t}} - e^2}{2} + \int_1^t e^{\frac{2}{x}} dx.$$

6. En déduire l'ensemble des primitives de f .
7. Calculer l'aire du domaine du plan constitué des points (x, y) vérifiant $1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Exercice 4 On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

1. Calculer I_0 et montrer que $I_1 = \ln 2 - 1/2$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+2}.$$

3. Pour x réel différent de -1 et n entier naturel non nul, montrer que

$$1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n - \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{1+x}.$$

4. On pose

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Dédurre de la question précédente que

$$I_n = (-1)^n (S_n - \ln 2).$$

5. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 5

1. On se propose de montrer par récurrence la proposition

\mathcal{P}_n : Si n nombres réels strictement positifs a_1, a_2, \dots, a_n vérifient $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, alors $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.

Pour ce faire, on suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vérifiée pour un certain $n \geq 1$, et on considère $n + 1$ nombres réels strictement positifs a_1, \dots, a_{n+1} vérifiant $a_1 a_2 \cdots a_{n+1} = 1$. On supposera les a_i rangés par ordre croissant, c'est-à-dire $a_1 \leq \dots \leq a_n$.

(a) Montrer que $a_1 \leq 1$ et $a_{n+1} \geq 1$.

(b) On pose $b_1 = a_1 a_{n+1}$. Montrer que $b_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \geq n$.

(c) En déduire que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} \geq n + 1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1)$.

(d) En déduire que la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vérifiée, puis conclure soigneusement.

2. On considère maintenant n nombres réels strictement positifs x_1, \dots, x_n . Montrer que

$$(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

(on pourra poser $a_k = \frac{x_k}{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}$ pour $1 \leq k \leq n$ et utiliser la question précédente).

3. On considère enfin un nombre réel $x > 0$.

(a) Calculer $(1 \times x \times x^2 \cdots \times x^{2n})^{\frac{1}{2n+1}}$.

(b) Montrer que

$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n}} \leq \frac{1}{2n + 1}$$

Exercice 6 Soit \mathcal{Q} l'ensemble des nombres complexes $z = a + ib$ tels que $a > 0$ et $b > 0$. On définit une suite $(z_n)_{n \geq 0}$ par $z_0 \in \mathcal{Q}$ et

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2} \quad \text{pour } n \geq 0.$$

1. Montrer que $z_n \in \mathcal{Q}$ pour tout entier $n \geq 0$.

2. En déduire qu'il existe un unique réel positif ρ_n et un unique réel $\theta_n \in]0, \pi/2[$ tels que $z_n = \rho_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$.

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\rho_{n+1} = \rho_n \cos \frac{\theta_n}{2}$$

et

$$\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$$

4. En déduire que la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ converge vers une limite réelle $l \geq 0$.

Exercice 7

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne dans laquelle on a mis n boules bleues, 5 boules rouges et 3 boules jaunes, soit $n + 8$ boules en tout.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne, et on note p_n la probabilité que ces deux boules aient la même couleur.
 - (a) Donner la probabilité d'avoir sorti deux boules bleues, celle d'avoir sorti deux boules rouges et celle d'avoir sorti deux boules jaunes. En déduire la valeur de p_n
 - (b) Calculer la limite de p_n quand $n \rightarrow +\infty$. Pouvez-vous donner une explication intuitive au résultat obtenu ?
2. On effectue maintenant une série de 10 tirages successifs de deux boules comme à la question précédente, en remettant les boules dans l'urne après chaque tirage. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où, lors de ces 10 tirages, on a obtenu deux boules de même couleur.
 - (a) Quelle est la loi de X ?
 - (b) Calculer la probabilité r_n d'avoir obtenu exactement 9 fois deux boules de même couleur dans ces tirages.
 - (c) Calculer la limite de r_n quand $n \rightarrow +\infty$. Pouvez-vous donner une explication intuitive au résultat obtenu ?